数チャレ 第74回(2007年3月)

n を2以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを $a_n x+b_n$ とする。

(1) a_2，b_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3) 各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

出典：2007年 東北大学

解答

(1) $x^2=(x^2-6x-12)+6x+12$ より

$$a_2=6,\quad b_2=12 \quad \text{(答)}$$

(2) ある整式 $Q_n(x)$ を用いて

$$x^n=(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

と表されるから，両辺に x をかけて

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= (x^2-6x-12)\cdot xQ_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &= (x^2-6x-12)\cdot xQ_n(x)+a_n(x^2-6x-12)+(6a_n+b_n)x+12a_n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=6a_n+b_n,\quad b_{n+1}=12a_n \quad \text{(答)}$$

(3) (2)より，p が a_n と b_n の共通の素因数であるとすれば，p は a_{n+1} も b_{n+1} も割るから，$a_2=6$，$b_2=12$ より

少なくとも2，3は a_n と b_n の公約数である。

a_{n+1} と b_{n+1} が 2，3以外に共通の素因数 p をもつとすれば，p は12および6と互いに素であるから，p は a_n と b_n の公約数である。したがって，p は a_2，b_2 の公約数となって矛盾するから，

a_n と b_n は2，3以外に共通の素因数をもたない。

以上より，

a_n と b_n の公約数で素数となるものは2，3　(答)

であり，それ以外に共通の素因数はもたない。