数チャレ 第75回(2007年4月)

数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n(a_n + 1)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．次の問いに答えよ.

(1) $n \geqq 2$ のとき, $\displaystyle (2a_1+1)^2 + \sum_{k=2}^{n}(2a_k)^2 = (2a_n+1)^2$ となることを示せ.

(2) $2a_n + 1$ と $2a_{n+1}$ の最大公約数は 1 であることを示せ.

(3) 次の 3 条件

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$,

(ii) x と y の最大公約数は 1,

(iii) z は y の倍数

を満たす 4 つの自然数の組 (x, y, z, w) は無数にあることを示せ.

出典：2007 年 大阪府立大学 経済学部

解答

(1) $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned}(2a_1+1)^2 + (2a_2)^2 &= 4a_1(a_1+1) + 1 + 4{a_2}^2 \\ &= 4a_2 + 1 + 4{a_2}^2 \\ &= (2a_2+1)^2\end{aligned}$$

$\displaystyle (2a_1+1)^2 + \sum_{k=2}^{n}(2a_k)^2 = (2a_n+1)^2$ が成り立つとすれば,

$$\begin{aligned}(2a_1+1)^2 + \sum_{k=2}^{n+1}(2a_k)^2 &= (2a_n+1)^2 + (2a_{n+1})^2 \\ &= 4a_n(a_n+1) + 1 + 4{a_{n+1}}^2 \\ &= 4a_{n+1} + 1 + 4{a_{n+1}}^2 \\ &= (2a_{n+1}+1)^2\end{aligned}$$

となるから，数学的帰納法により，2 以上のすべての自然数 n に対して

$$(2a_1+1)^2 + \sum_{k=2}^{n}(2a_k)^2 = (2a_n+1)^2$$

が成り立つ。 (おわり)

(2) $2a_{n+1} = 2a_n(a_n+1)$ であるから，$2a_n + 1$ が $2,\ a_n,\ a_n + 1$ のいずれとも互いに素であることを示せばよい。

互除法により

$$gcd(2a_n+1,\ 2) = gcd(1,\ 2) = 1$$

$$gcd(2a_n+1,\ a_n) = gcd(1,\ a_n) = 1$$

$$\begin{aligned} gcd(2a_n+1,\ a_n+1) &= gcd\big(2(a_n+1)-1,\ a_n+1\big) \\ &= gcd(-1,\ a_n+1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから，$2a_n+1$ と $2a_{n+1} = 2a_n(a_n+1)$ は互いに素である。　(おわり)

(3)　$x_n = 2a_n+1$，$y_n = 2a_{n+1}$，$z_n = 2a_{n+2}$，$w_n = 2a_{n+2}+1$ とおくと，(1)で示した式変形を辿ると

$$x_n{}^2 + y_n{}^2 + z_n{}^2 = w_n{}^2$$

が成り立つ。(2)より x と y は互いに素であり，

$$z_n = 2a_{n+2} = 2a_{n+1}(a_{n+1}+1) = y_n(a_{n+1}+1)$$

となるから，3 条件 (i), (ii), (iii) を満たす。

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n(a_n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定まる数列 $\{a_n\}$ が限りなく続くことより，3 条件を満たす 4 つの自然数の組 $(x_n,\ y_n,\ z_n,\ w_n)$ は無数に存在する。　(おわり)