# 数チャレ 第76回 (2007年5月)

正の整数 $n=2^a b$ (ただし $a$ は 0 以上の整数で $b$ は奇数)に対して $f(n)=a$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 正の整数 $k,\ m$ に対して $f(km)=f(k)+f(m)$ であることを示せ。

(2) $f(3^n+1)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

(3) $f(3^n-1)-f(n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。

**出典**：2007 年 横浜国立大学 経済学部

## 解答

(1) 素因数分解を考えることにより

$$k=2^a b,\ \ m=2^c d \quad (a,\ c \text{ は 0 以上の整数}，b,\ d \text{ は正の奇数})$$

と表すことができて，

$$f(k)=a,\quad f(m)=c$$

であり，指数法則より

$$km=2^{a+c}bd$$

奇数の積 $bd$ は奇数であるから

$$f(km)=a+c=f(k)+f(m)$$

(おわり)

(2) $3^2=8+1$ に注目する。

$n$ が偶数のとき

$$n=2m \quad (m \text{ は 0 以上の整数})$$

と表されて，

$$\begin{aligned}3^{2m}+1&=(8+1)^m+1\\&=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k\,8^k+1\\&=(8\text{ の倍数})+1^m+1\\&=(8\text{ の倍数})+2\end{aligned}$$

であるから，

$$f(3^{2m}+1)=1$$

$n$ が奇数のとき

$$n=2m+1 \quad (m \text{ は 0 以上の整数})$$

と表されて，

$$\begin{aligned}3^{2m+1}+1&=3(8+1)^m+1\\&=(8\text{ の倍数})+3\cdot1^m+1\\&=(8\text{ の倍数})+2^2\end{aligned}$$

であるから，

$$f(3^{2m+1}+1)=2$$

以上をまとめて

$$f(3^n+1)=\begin{cases}1 & (n\text{が偶数})\\ 2 & (n\text{が奇数})\end{cases}\qquad (\text{答})$$

(3)(i)　$n$ が奇数のとき

$$n=2m+1\quad (m\text{は}0\text{以上の整数})$$

と表されて，

$$\begin{aligned}3^{2m+1}-1&=3(8+1)^m-1\\&=(8\text{の倍数})+3\cdot1^m-1\\&=(8\text{の倍数})+2\end{aligned}$$

と変形できるから，

$$f(3^n-1)-f(n)=1-0=1$$

(ii)　$n$ が偶数のとき

$$n=2^ab\quad (a\text{は}1\text{以上の整数，}b\text{は正の奇数})$$

と表されて，平方の差を和と差の積に分解すると

$$\begin{aligned}3^{2^ab}-1&=(3^{2^{a-1}b}+1)(3^{2^{a-1}b}-1)\\&=(3^{2^{a-1}b}+1)(3^{2^{a-2}b}+1)\cdots(3^{2b}+1)(3^b+1)(3^b-1)\end{aligned}$$

(i)より

$$f(3^b-1)=1$$

であり，(1), (2)の結果とあわせると，

$$\begin{aligned}f(3^{2^ab}-1)&=f(3^{2^{a-1}b}+1)+f(3^{2^{a-2}b}+1)+\cdots\\&\qquad\cdots+f(3^{2b}+1)+f(3^b+1)+1\\&=(a-1)+2+1\\&=a+2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(3^n-1)-f(n)=(a+2)-a=2$$

(i), (ii)をまとめて

$$f(3^n-1)-f(n)=\begin{cases}2 & (n\text{が偶数})\\ 1 & (n\text{が奇数})\end{cases}\qquad (\text{答})$$