数チャレ 第77回(2007年6月)

平方して(10進表示による)各位の数の和をとると，もとの数と等しくなる(1桁の場合も含む)ような自然数をすべて求めよ。

解答

求める自然数を n とし，n の(10進表示による)桁数を d とすると

$$10^{d-1} \leqq n < 10^d \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\ 10^{2d-2} \leqq n^2 < 10^{2d}$$

であるから，n^2 は $2d-1$ 桁または $2d$ 桁である。

n^2 の各位の数の和が n に等しいから

$$n \leqq 9 \times 2d = 18d \qquad \cdots\cdots ②$$

が必要であり，①，② より

$$10^{d-1} \leqq 18d \qquad \cdots\cdots ③$$

である。$10^2 > 18 \times 3$ であり，3 以上の整数 m に対して

$$10^{m-1} > 18m \implies 10^m > 180m = 18(m+9m) > 18(m+1)$$

であるから，③を満たすのは

$$d = 1 \text{ または } d = 2$$

の場合に限られる。②も考えると

$$n \leqq 36$$

の範囲だけ調べれば十分である。

$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 4 \neq 2,\ \ 3^2 = 9 \neq 3,\ \ 1+6 = 7 \neq 4,\ \ 2+5 = 7 \neq 5,$$
$$3+6 = 9 \neq 6,\ \ 4+9 = 13 \neq 7,\ \ 6+4 = 10 \neq 8,$$
$$9^2 = 81,\ \ 8+1 = 9,$$
$$1+0+0 = 1 \neq 10,\ \ 1+2+1 = 4 \neq 11,\ \ 1+4+4 = 9 \neq 12,$$
$$1+6+9 = 16 \neq 13,\ \ 1+9+6 = 16 \neq 14,\ \ 2+2+5 = 9 \neq 15,$$
$$2+5+6 = 13 \neq 16,\ \ 2+8+9 = 19 \neq 17,\ \ 3+2+4 = 9 \neq 18,$$
$$3+6+1 = 10 \neq 19,\ \ 4+0+0 = 4 \neq 20,\ \ 4+4+1 = 9 \neq 21,$$
$$4+8+4 = 16 \neq 22,\ \ 5+2+9 = 16 \neq 23,\ \ 5+7+6 = 18 \neq 24,$$
$$6+2+5 = 13 \neq 25,\ \ 6+7+6 = 19 \neq 26,\ \ 7+2+9 = 18 \neq 27$$

28^2，29^2，30^2，31^2 は 3 桁であるから，各位の数の和は $3 \times 9 = 27$ 以下の数であり，32^2，33^2，34^2，35^2，36^2 は 2000 未満の数であるから，各位の数の和は $1 + 9 \times 3 = 28$ 以下の数である。

よって，求める自然数は

$$n = 1,\ 9 \quad (\text{答})$$

ですべてである。