数チャレ 第78回(2007年7月)

3以上の整数nに対して，1, 2, 3, $\cdots$, nを適当に3つのグループに分け，各グループの整数の和がすべて等しくなるようにできるとき，nは「3分割可能である」と呼ぶことにする。

(1) $n=6$は3分割可能であることを示せ。

(2) $n=10$は3分割可能でないことを示せ。

(3) 3以上の整数nが3分割可能であるための必要十分条件を求めよ。

解答

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6について

$$1+6=2+5=3+4$$

であるから，6は3分割可能である。 (証明おわり)

(2) 10が3分割可能であるとすれば，1から10までの和が3の倍数であることが必要であるが，

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55$$

は3で割り切れないから不可能である。 (証明おわり)

(3) 1, 2, 3は相異なる数であるから，3は3分割可能ではない。

(2)と同様に考えて，

$$n=3m+1 \quad (m\text{は整数})$$

と表されるならば，

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(3m+1)(3m+2)$$

は3で割り切れないから，$3m+1$は3分割不可能である。

$$1+4=2+3=5$$
$$1+6=2+5=3+4$$
$$1+2+3+6=4+8=5+7$$
$$1+2+3+4+5=6+9=7+8$$

より，5, 6, 8, 9は3分割可能である。

(1)を参考にすると，連続する6整数は

$$(n+1)+(n+6)=(n+2)+(n+5)=(n+3)+(n+4)$$

のように同数の3つの和に分割することができるから，

3分割可能かどうかは6を周期とする

ことになり，nが3分割可能であるための必要十分条件は

nは6以上の3の倍数，または3で割ると2余る5以上の整数 (答)

であることである。