数チャレ 第79回(2007年8月)

整数 $x,\ y,\ z$ は

$$xyz \neq 0,\ \ x\text{ と }y\text{ は互いに素},\ z\text{ は }3\text{ で割り切れない偶数} \qquad \cdots\cdots (*)$$

であるとする。

(1) $(*)$のもとで $x^3+y^3=z^2$ が成り立つとすれば，$x+y$ と x^2-xy+y^2 は互いに素であることを証明せよ。

(2) $(*)$のもとでは，$x^3+y^3=z^2$ を満たす整数 $x,\ y,\ z$ は存在しないことを証明せよ。

解答

(1) $x+y$ と x^2-xy+y^2 が共通の素因数 p をもつとすれば，

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$$

より $p\,|-3xy$ であり，p は素数であるから

$$p=3\ \text{ または }\ p\,|\,x\ \text{ または } p\,|\,y$$

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=z^2$ より $p\,|\,z$ でもあるから，$3\nmid z$ より $p\neq 3$ であり，

$$p\,|\,x\ \text{ または }\ p\,|\,y$$

となる。$p\,|\,x$ であるとすれば $p\,|\,x+y$ より $p\,|\,y$ となり，$p\,|\,y$ であるとすれば $p\,|\,x+y$ より $p\,|\,x$ となるから，いずれの場合も x と y が互いに素であることに反する。

よって，$x+y$ と x^2-xy+y^2 は共通の素因数をもたないから，互いに素である。

(証明おわり)

(2) $(*)$のもとで，$x^3+y^3=z^2$ を満たす整数 $x,\ y,\ z$ が存在すると仮定する。

$$x^2-xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geqq 0$$

であることにも注意して，$(x+y)(x^2-xy+y^2)=z^2$ の両辺の素因数分解を考えると，(1)より

$$x+y=a^2,\ \ x^2-xy+y^2=b^2$$

を満たす互いに素な正の整数 $a,\ b$ が存在する。

$x^3+y^3=z^2$ は偶数であるから，x と y はともに偶数であるか，ともに奇数であり，x と y が互いに素であることより

$$x\text{ と }y\text{ はともに奇数},\ a\text{ は偶数},\ b\text{ は奇数}$$

である。n を整数として

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$$

であることより

$$x^2\equiv y^2\equiv b^2\equiv 1 \pmod 4$$

であり，

$$xy=x^2+y^2-b^2\equiv 1 \pmod 4$$

であるから

$$x\equiv y\equiv 1 \pmod 4\ \text{ または }\ x\equiv y\equiv 3 \pmod 4$$

となり，いずれの場合も

$$x + y \equiv 2 \pmod 4$$

となる。ところが，

$$x + y = a^2 \equiv 0 \pmod 4$$

であるから矛盾する。

よって，条件(*)のもとでは，$x^3 + y^3 = z^2$ は成り立たない。　(証明おわり)

(注)

1° 「z が 3 で割り切れない偶数」という条件をつけなければ，

$$x^3 + y^3 = z^2, \quad xyz \neq 0$$

を満たす互いに素な整数の組$(x,\ y,\ z)$は無数に存在する。例えば，「数学ワンダーランド」のページの「方程式 $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ の整数解について」を参照せよ。

2° 5 以上の素数 p に対して，$p \mid z$，$2 \nmid z$ または $p \nmid z$，$2 \mid z$ ならば

$$x^p + y^p = z^2, \quad gcd(x,\ y) = 1$$

を満たす整数 x，y，z が存在しないことが知られている。

A. Rotkiewicz, *On the Equation* $x^p + y^p = z^2$,
Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 30 (1982), 211-214