数チャレ 第80回(2007年9月)

3次方程式$x^3-ax+a+1=0$が整数解をもつような整数aの値をすべて求めよ。

解答

整数解をnとすると

$$n^3-an+a+1=0$$

が成り立つから，

$$a(n-1)=n^3+1$$

であり，$n-1=0$と$n^3+1=0$は両立しないから

$$a=\frac{n^3+1}{n-1} \qquad \cdots\cdots (*)$$

多項式の除法により，恒等式

$$n^3+1=(n-1)(n^2+n+1)+2$$

が成り立つから，$(*)$は

$$a=n^2+n+1+\frac{2}{n-1}$$

と変形できて，aもnも整数であるから

$$\frac{2}{n-1}\text{は整数}$$

である。したがって，

$$n-1=-2,\ -1,\ 1,\ 2$$

$$\therefore\ \ n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$$

$(*)$に代入して

$$a=0,\ -1,\ 9,\ 14 \quad (\text{答})$$