数チャレ 第81回 (2007年10月)

方程式 $3^m - 2^n = 1$ を満たす自然数 $m,\ n$ について考える。

(1) $n \geqq 2$ のとき，m は偶数であることを示せ。

(2) $(m,\ n)$ の組をすべて求めよ。

解答

$$3^m - 2^n = 1 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

(1) 二項定理により

$$3^m = (4-1)^m = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \cdot 4^{m-k}(-1)^k = (4\text{の倍数}) + (-1)^m$$

であるから，

$$3^m \equiv (-1)^m \pmod 4 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

$n \geqq 2$ のとき 2^n は4の倍数であるから，①を満たすとすれば，②より

$$(-1)^m \equiv 1 \pmod 4$$

よって，m は偶数である。 (証明おわり)

(2) $n = 1$ のとき

$$3^m = 2 + 1 = 3 \qquad \therefore\ m = 1$$

$n \geqq 2$ のとき，(1)より

$$m = 2k \quad (k\text{は自然数}) \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

と表されるから，①は

$$2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1) \qquad \cdots\cdots \text{④}$$

$3^k + 1,\ 3^k - 1$ はともに偶数であり，

$$(3^k + 1) - (3^k - 1) = 2$$

であるから，

$$gcd(3^k + 1,\ 3^k - 1) = 2$$

である。$0 < 3^k - 1 < 3^k + 1$ も考えあわせると，④より

$$\begin{cases} 3^k - 1 = 2 & \cdots\cdots \text{⑤} \\ 3^k + 1 = 2^{n-1} & \cdots\cdots \text{⑥} \end{cases}$$

に定まる。⑤より

$$3^k = 2 + 1 = 3 \qquad \therefore\ k = 1$$

このとき，③より

$$m = 2$$

⑥より

$$2^{n-1} = 3 + 1 = 4 \qquad \therefore\ n = 3$$

以上より，$3^m - 2^n = 1$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ は

$$(m,\ n) = (1,\ 1),\ (2,\ 3) \quad (\text{答})$$