数チャレ 第82回(2007年11月)

$2x^2+y^2=5x^2y$ を満たす正の整数 $x,\ y$ は存在しないことを示せ。

解答

$2x^2+y^2=5x^2y$ を満たす正の整数 $x,\ y$ が存在するとして，この式を変形すると

$$y^2=5x^2y-2x^2 \qquad \therefore\ \left(\frac{y}{x}\right)^2=5y-2$$

$\dfrac{y}{x}$ は有理数，その平方が整数であるから，$\dfrac{y}{x}$ は整数であり，

$$y=xz$$

となる正の整数 z が存在する。このとき

$$z^2=5xz-2 \qquad \therefore\ z(5x-z)=2$$

$z>0$ より $5x-z>0$ であり，積が 2 となる正の整数の組を考えると

$$(z,\ 5x-z)=(1,\ 2) \text{ または } (2,\ 1)$$

$z=1$ の場合も $z=2$ の場合も $x=\dfrac{3}{5}$ となって，x は(正の)整数でない。

よって，$2x^2+y^2=5x^2y$ を満たす正の整数 $x,\ y$ は存在しない。 (おわり)

別解

$x^2,\ y^2$ を 5 で割った余りで分類すると

x^2	0	0	0	1	1	1	4	4	4
y^2	0	1	4	0	1	4	0	1	4
$2x^2+y^2$	0	1	4	2	3	1	3	4	2

となるから，$2x^2+y^2=5x^2y$ を満たす正の整数 $x,\ y$ があるとすれば，$x,\ y$ はともに 5 の倍数で

$$x=5x_1,\quad y=5y_1 \quad (x_1,\ y_1 \text{ は正の整数})$$

と表される。このとき，

$$2(5x_1)^2+(5y_1)^2=5(5x_1)^2(5y_1) \qquad \therefore\ 2{x_1}^2+{y_1}^2=5^2{x_1}^2y_1$$

となり，同様の考察を繰り返すことにより，任意の自然数 n に対して

$$2{x_n}^2+{y_n}^2=5^{n+1}{x_n}^2y_n,\quad x=5^nx_n,\quad y=5^ny_n \quad (x_n,\ y_n \text{ は正の整数})$$

と表される。ところが，このことは $x,\ y$ が何回でも 5 で割り切れることを意味するので矛盾する。

よって，$2x^2+y^2=5x^2y$ を満たす正の整数 $x,\ y$ は存在しない。 (おわり)