数チャレ 第83回 (2007年12月)

方程式

$$(3x-5)(5y-7)+(5y-7)(7z-3)+(7z-3)(3x-5)=0$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ。

解答

$3x-5>0,\ 5y-7>0,\ 7z-3>0$ がすべて成り立つとすれば，方程式の左辺は正となってしまうから，$7z-3 \geqq 7-3=4$ を考え，

$$3x-5 \leqq 0 \ \text{ または } \ 5y-7 \leqq 0$$

であることがわかる。$x,\ y$ は 1 以上の整数であるから，

$$x=1 \ \text{ または } \ y=1$$

である。

(i) $x=1$ のとき

与えられた方程式を $5y-7$ と $7z-3$ の式とみて

$$-2(5y-7)+(5y-7)(7z-3)-2(7z-3)=0$$
$$(5y-7-2)(7z-3-2)=(-2)^2$$
$$\therefore\ (5y-9)(7z-5)=4$$

$7z-5 \geqq 7-5=2$ より

$$(5y-9,\ 7z-5)=(2,\ 2),\ (1,\ 4)$$

の可能性があるが，それぞれ

$$(y,\ z)=\left(\frac{11}{5},\ 1\right),\ \left(2,\ \frac{9}{7}\right)$$

となって不適である。

(ii) $y=1$ のとき

与えられた方程式を $3x-5$ と $7z-3$ の式とみて

$$-2(3x-5)-2(7z-3)+(7z-3)(3x-5)=0$$
$$(3x-5-2)(7z-3-2)=(-2)^2$$
$$\therefore\ (3x-7)(7z-5)=4$$

$7z-5 \geqq 7-5=2$ を考えて，

$$(3x-7,\ 7z-5)=(2,\ 2),\ (1,\ 4)$$

$3x-7=3(x-3)+2$ は 3 で割ると 2 余り，$7z-5=7(z-1)+2$ は 7 で割ると 2 余るから，

$$(3x-7,\ 7z-5)=(2,\ 2) \qquad \therefore\ (x,\ z)=(3,\ 1)$$

以上より，求める自然数の組は

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 1) \quad (\text{答})$$