数チャレ 第84回 (2008年1月)

自然数 n に対して，$\dfrac{n}{2008}$ を約分して得られる既約分数を考え，10 進表示したときの分母の桁数と分子の桁数の和を a_n とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n$ を求めよ。

解答

$2008 = 2^3 \times 251$ と素因数分解されるから，$1 \leqq n \leqq 20$ において n が奇数ならば $\dfrac{n}{2008}$ は既約分数である。

まず，分子の桁数の和を集計する。

1 から 9 までについては，約されても約されなくても 1 桁である。

10 から 19 までについては，奇数のときは約されないで 2 桁のままであり，偶数のときは 2 で割ると 1 桁になる。20 は 4 で約されて 5 (1 桁)になる。

よって，$1 \leqq n \leqq 20$ における既約分数の分子の桁数の和は

$$20 + (10\text{ から }19\text{ までの奇数の個数}) = 25$$

次に，分母の桁数の和を集計する。

2008 および $\dfrac{2008}{2} = 1004$ は 4 桁，$\dfrac{2008}{4} = 502$ および $\dfrac{2008}{8} = 251$ は 3 桁であるから，$1 \leqq n \leqq 20$ における分母の桁数の和は

$$4 \times 20 - (1\text{ から }20\text{ までの }4\text{ の倍数の個数}) = 80 - 5 = 75$$

以上より

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = 25 + 75 = 100 \quad (\text{答})$$