

数チャレ 第85回 (2008年2月)

- (1) $2xy + x + y = 17$ かつ $1 \leq x \leq y$ を満たす整数の組 (x, y, z) を求めよ。
(2) $xy + yz + zx + x + y + z = 41$ かつ $1 \leq x \leq y \leq z$ を満たす整数の組 (x, y, z) を求めよ。

解答

- (1) $2xy + x + y = 17$ を同値変形すると

$$xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{17}{2}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{2} + \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$$
$$\therefore (2x+1)(2y+1) = 35$$

$3 \leq 2x+1 \leq 2y+1$ を満たす整数の組合せを考えて、

$$(2x+1, 2y+1) = (5, 7)$$

$$\therefore (x, y) = (2, 3) \quad (\text{答})$$

- (2) (1)の計算をヒントにすると

$$xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$
$$yz + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$
$$zx + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x = \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

辺々加えて

$$xy + yz + zx + x + y + z$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}$$
$$= 41$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{167}{4}$$
$$\therefore (2x+1)(2y+1) + (2y+1)(2z+1) + (2z+1)(2x+1) = 167$$

$3 \leq 2x+1 \leq 2y+1 \leq 2z+1$ より

$$3(2x+1)^2 \leq 167$$

$$\therefore (2x+1)^2 \leq \frac{167}{3} = 55 + \frac{2}{3}$$

$2x+1$ が 3 以上の奇数であることも考えて、

$$(2x+1)^2 = 3^2, 5^2, 7^2$$

$$\therefore x = 1, 2, 3$$

(i) $x = 1$ のとき

$$(2y + 1)(2z + 1) + 3(2y + 1) + 3(2z + 1) = 167$$

$$(2y + 1 + 3)(2z + 1 + 3) = 167 + 3^2$$

$$(2y + 4)(2z + 4) = 176$$

$$\therefore (y + 2)(z + 2) = 44$$

$x + 2 = 3 \leq y + 2 \leq z + 2$ を考えて

$$(y + 2, z + 2) = (4, 11)$$

$$\therefore (y, z) = (2, 9)$$

(ii) $x = 2$ のとき

$$(2y + 1)(2z + 1) + 5(2y + 1) + 5(2z + 1) = 167$$

$$(2y + 1 + 5)(2z + 1 + 5) = 167 + 5^2$$

$$(2y + 6)(2z + 6) = 192$$

$$\therefore (y + 3)(z + 3) = 48$$

$x + 3 = 5 \leq y + 3 \leq z + 3$ を考えて

$$(y + 3, z + 3) = (6, 8)$$

$$\therefore (y, z) = (3, 5)$$

(iii) $x = 3$ のとき

$$(2y + 1)(2z + 1) + 7(2y + 1) + 7(2z + 1) = 167$$

$$(2y + 1 + 7)(2z + 1 + 7) = 167 + 7^2$$

$$(2y + 8)(2z + 8) = 216$$

$$\therefore (y + 4)(z + 4) = 54 = 6 \times 9$$

$x + 4 = 7 \leq y + 4 \leq z + 4$ の範囲では、この式を満たす整数 y, z は存在しないから不適である。

以上より、求める整数の組は

$$(x, y, z) = (1, 2, 9), (2, 3, 5) \quad (\text{答})$$