数チャレ 第86回(2008年3月)

3辺の長さが相異なる自然数である三角形について考える。この三角形の3辺の長さを a, b, c $(a < b < c)$ とし，三角形の周の長さを ℓ とする。また，三角形の面積を S とする。次の問いに答えなさい。

(1) この三角形の最も大きい角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ の値を a, b, c を用いて表しなさい。

(2) 上の(1)を利用して，次の関係式が成り立つことを示しなさい。

$$16S^2 = \ell(\ell - 2a)(\ell - 2b)(\ell - 2c)$$

(3) S が自然数であるとき，ℓ は偶数であることを示しなさい。

(4) $S = 6$ となる組 $(a,\ b,\ c)$ を求めなさい。

(5) S の値が互いに異なる2つの素数の積になるのは，$S = 6$ の場合に限ることを示しなさい。

出典：2008年 慶応義塾大学 医療看護学部

解答

(1) θ は最大角で $a < b < c$ であるから，

θ の対辺の長さは c

である。余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{答})$$

(2)
$$\begin{aligned}
\sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\
&= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \\
&= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2b^2} \\
&= \frac{\{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2\}}{4a^2b^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2b^2} \\
&= \frac{\ell(\ell - 2c)(\ell - 2b)(\ell - 2a)}{4a^2b^2}
\end{aligned}$$

面積公式より $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 4a^2b^2\sin^2\theta \\
&= \ell(\ell - 2a)(\ell - 2b)(\ell - 2c)
\end{aligned}$$

(おわり)

(3) $2a,\ 2b,\ 2c$ が偶数であることに注意すると，

$$\text{「}\ell\text{ が奇数」} \Longrightarrow \text{「}\ell,\ \ell-2a,\ \ell-2b,\ \ell-2c\text{ はすべて奇数」}$$
$$\Longrightarrow \text{「}16S^2=\ell(\ell-2a)(\ell-2b)(\ell-2c)\text{ も奇数」}$$
$$\Longrightarrow \text{「}S^2\text{ は自然数ではない」}$$

が成り立つから，対偶をとると

$$\text{「}S\text{ が自然数」} \Longrightarrow \text{「}S^2\text{ は自然数」} \Longrightarrow \text{「}\ell\text{ は偶数」}$$

(おわり)

(4) (3)を踏まえて $\ell=2k$ とおくと，(2)より

$$6^2=k(k-a)(k-b)(k-c) \qquad \cdots\cdots ①$$

三角形の成立条件より

$$k-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}>0$$

であり，$0<a<b<c$ より

$$0<k-c<k-b<k-a<k \qquad \cdots\cdots ②$$

$6^2=2^2\times3^2$ と ①，② を考えると，$k-c \geqq 2$ ならば $6^2 \geqq 5\times4\times3\times2=120$ となって矛盾するから

$$k-c=1$$

に定まる。$k-b=3$ とすると，②より $k(k-a)(k-b) \geqq 5\times4\times3=60$ となって矛盾するから $k-b=2$ に定まり，

$$(k-c,\ k-b,\ k-a,\ k)=(1,\ 2,\ 3,\ 6)$$
$$\therefore\ (a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5) \quad \text{(答)}$$

(5) (4)と同様に議論して，三角形の成立条件と $a<b<c$ より

$$0<k-c<k-b<k-a<k \quad \left(k=\frac{\ell}{2}\text{ は自然数}\right)$$

である。いま，S が 2 つの素数 $p,\ q\ (p<q)$ の積になるとすれば，

$$S^2=p^2q^2=k(k-a)(k-b)(k-c)$$

(4)と同様に，$k-c=p$ ならば $k-b \geqq q,\ k-a \geqq q,\ k \geqq q$ となって矛盾するから

$$k-c=1$$

に限られ，$k-b=q$ とすると

$$p^2q=p\times pq=p^2\times q$$

をどのように 2 つの自然数の積に分けても，一方の数は q 以下となるから，

$$k-b=p \qquad \therefore\ (k-c,\ k-b,\ k-a,\ k)=(1,\ p,\ q,\ pq)$$

このとき，

$$(k-c)+(k-b)+(k-a)=1+p+q,\quad k=pq$$

$a+b+c=2k$ より

$$pq=k=1+p+q<q+q+q=3q \qquad \therefore\ p<3$$

p は素数であるから $p=2$ に決まり，$pq=1+p+q$ より $q=3$ に決まる。

したがって，$S=6$ に限られる。 (おわり)