数チャレ 第87回(2008年4月)

以下の問いに答えよ。

(1) xを有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2) a, bを整数とする。a^2-7b^2が 4 の倍数ならば，aとbはともに偶数であることを示せ。

(3) rは整数，sは有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$が整数ならば，$s$は整数であることを示せ。

出典：2008 年 千葉大学

解答

(1) xが有理数であるとすれば，互いに素な自然数m, nを用いて

$$x=\pm\frac{m}{n}$$

と表される。

$$7x^2=\frac{7m^2}{n^2}$$

は整数であるから $7m^2$ は n^2 の倍数であるが，m^2 と n^2 は互いに素である(共通な素因数をもたない)から，

7 は n^2 で割り切れる。

7は(1でない)平方因数をもたないから

$$n^2=1 \qquad \therefore\ n=1$$

よって，$x=\pm m$は整数である。 (証明おわり)

(2) kを整数として，

$$(2k)^2=4k^2$$
$$(2k+1)^2=4k(k+1)+1$$

となるから，偶数の平方は4の倍数，奇数の平方は4で割ると1余る。

a^2, b^2 および a^2-7b^2 について 4で割った余りは

a^2	0	0	1	1
b^2	0	1	0	1
a^2-7b^2	0	1	1	2

ですべての場合が尽くされるから，a^2-7b^2が 4 の倍数となるのは，aとbがともに偶数である場合に限られる。 (証明おわり)

(3) $\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 - 7s^2 = t$ が整数ならば，

$$r^2 - 7(2s)^2 = 4t \text{ は } 4 \text{ の倍数} \qquad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

であり，r は整数であるから

$$7(2s)^2 = r^2 - 4t \text{ も整数} \qquad \cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

である。

$2s$ は有理数であるから，Ⓑおよび (1)より

$2s$ は整数

であり，Ⓐおよび (2)より

$2s$ は偶数

となる。

したがって，

$$s = \frac{2s}{2} \text{ は整数}$$

である。 (証明おわり)