数チャレ 第88回 (2008年5月)

任意の整数 n に対して，$f(n)=\dfrac{n^3}{a}+\dfrac{n^2}{b}+\dfrac{n}{c}$ が整数となるような2以上の整数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。

解答

必要条件として $f(1)$ および $f(-1)$ は整数であるから，

$$f(1)+f(-1)=\frac{2}{b},\quad f(1)-f(-1)=\frac{2}{a}+\frac{2}{c}$$

はともに整数であり，b は2以上の整数であるから

$$b=2$$

である。

$f(2)=\dfrac{8}{a}+2+\dfrac{2}{c}$ も整数であるから，

$$\frac{6}{a}=\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{c}\right)-\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{c}\right),\quad \frac{6}{c}=4\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{c}\right)-\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{c}\right)$$

はいずれも整数であり，$a\geqq 2,\ c\geqq 2,\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{c}$ が整数であることより

$$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 6)$$

に限られる。

以下，十分性をチェックする。
連続する3整数の1つは3で割り切れるから，その積は3で割り切れる。隣り合う整数の一方は偶数であるから，その積は2で割り切れる。3と2は互いに素であるから，連続する3整数の積は6で割り切れることに注意する。

(i) $a=6,\ b=2,\ c=3$ のとき

$$f(n)=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

は任意の整数 n に対して整数となる。

(ii) $a=b=c=2$ のとき

$$f(n)=\frac{n^3+n^2+n}{2}$$

であるが，$f(1)=\dfrac{3}{2}$ であるから条件を満たさない。

(ii) $a=3,\ b=2,\ c=6$ のとき

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\\&=\frac{n^3-n}{3}+\frac{n^2+n}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

3 連続整数の積 $n(n-1)(n+1)$ は 6 で割り切れ，隣り合う整数の積 $n(n+1)$ は偶数であるから，任意の整数 n に対して $f(n)$ は整数となる。

以上より，求める整数の組は

$$(a,\ b,\ c) = (6,\ 2,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(注)

1° $a \geqq 2,\ b = 2,\ c \geqq 2$ より

$$f(1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

であることに注目すると，正の整数 $f(1)$ は

$$f(1) = 1$$

に定まり，必要条件の時点で $a = b = c = 2$ の場合も排除されて

$$(a,\ b,\ c) = (6,\ 2,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6)$$

の場合に絞られる。

2° $a = 3,\ b = 2,\ c = 6$ の場合の十分性のチェックにおいて，連続する整数の積の性質を用いる代わりに，

$$f(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

を根拠として，整数であることを導いてもよい。