数チャレ 第89回(2008年6月)

3辺の長さがすべて整数である直角三角形において，直角をはさむ2辺の長さを $a,\ b$ とし，斜辺の長さを c とする。a が素数であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) $c=b+1$ が成り立つことを示せ。

(2) b は4で割り切れることを示せ。

解答

(1) 三平方の定理より

$$a^2+b^2=c^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つから，これを変形すると

$$a^2=(c+b)(c-b)$$

となる。

$$c+b>c-b>0$$

であることに注意すると，a が素数であることより

$$\begin{cases} c+b=a^2 & \cdots\cdots ② \\ c-b=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ。③より

$$c=b+1 \qquad \cdots\cdots ④$$

である。

(証明おわり)

(2) ④を②に代入して

$$a^2=2b+1$$

$$\therefore\ b=\frac{a^2-1}{2} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$a,\ b$ は整数であるから a^2 は奇数であり，a も奇数である。そこで，

$$a=2n-1 \quad (n \text{は正の整数})$$

とおくと，⑤より

$$b=\frac{(2n-1)^2-1}{2}=2n(n-1)$$

と表される。n と $n-1$ の一方は偶数であるから

b は4で割り切れる。

(証明おわり)

(注) 本問は，2006年2月駿台高2東大模試で出題された。