数チャレ 第90回(2008年7月)

$\{a_n\}$ は各項が 0 と 1 のいずれかから成る数列であるとする。

$$\frac{3}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$$

である数列 $\{a_n\}$ をすべて求めよ。

解答

$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ より

$$a_1=a_2=1,\quad a_n=0\ (n\geqq 3)$$

は条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一つである。以下，これ以外の数列を考える。

$a_1=0$ とすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$$

となって題意の条件を満たさないから，

$$a_1=1,\quad a_2=0$$

ここで，数列 $\{a_n\}$ が

$$\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

の場合に限定されることを背理法で示すために，

3 以上のある整数 m に対して $a_m=0$

であると仮定すると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}&\leqq\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\sum_{k=3}^{m-1}\frac{1}{2^k}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\&=\frac{1}{2}+0+\frac{\frac{1}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^{m-3}}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{2^{m-3}-1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^m}\\&=\frac{1}{2}+\frac{2^{m-2}-1}{2^m}<\frac{1}{2}+\frac{2^{m-2}}{2^m}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

となって条件を満たさなくなるから，

3 以上のすべての整数 n に対して $a_n=1$

でなければならない。

以上より，求める数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = a_2 = 1,\quad a_n = 0\ (n \geqq 3)$$

または　　　　　　　　　　　　　　　　(答)

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 0,\quad a_n = 1\ (n \geqq 3)$$

である。