数チャレ 第91回(2008年8月)

(1) nが4以上の整数，xが2以上の実数であるとき，

$$(x^3-1)^{n-1} > x^{2n}$$

が成り立つことを示せ。

(2) nが2以上の整数であるとき，

$$a^{3n}-4a^{2n}-8=b^n$$

を満たす自然数a, bは存在しないことを示せ。

解答

(1) $n \geqq 4$のもとで，

$$f(x)=x^3-1-x^{\frac{2n}{n-1}} \quad (x \geqq 2)$$

とおくと，

$$f'(x)=3x^2-\frac{2n}{n-1}x^{\frac{2n}{n-1}-1}=3x^{\frac{n+1}{n-1}}\left(x^{\frac{n-3}{n-1}}-\frac{2n}{3(n-1)}\right)$$

ここで，

$$1-\frac{2n}{3(n-1)}=\frac{3(n-1)-2n}{3(n-1)}=\frac{n-3}{3(n-1)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{n-1}\right)>0$$

より，$x>1$でつねに$f'(x)>0$であるから，$x \geqq 2$で$f(x)$は単調増加である。
したがって，$x \geqq 2$のとき

$$f(x) \geqq f(2)=7-2^{\frac{2n}{n-1}}=7-(4^n)^{\frac{1}{n-1}}$$

$n=4$のとき

$$7^3=343>4^4=256$$

であり，$7^{k-1}>4^k$とすれば

$$7^k=7 \cdot 7^{k-1}>7 \cdot 4^k>4 \cdot 4^k=4^{k+1}$$

であるから，4以上のすべての整数nに対して

$$7^{n-1}>4^n$$

が成り立ち，

$$f(x) \geqq f(2)=7-(4^n)^{\frac{1}{n-1}}>0$$

$x>1$より

$$f(x)>0 \iff (x^3-1)^{n-1}>x^{2n}$$

である。 (証明おわり)

(2) $a=1$ のとき $a^{3n}-4a^{2n}-8=-11<0$ となるから，
$$a \geqq 2$$
であるとして示せばよい。

$n \geqq 4$ のとき，二項定理と(1)より
$$\begin{aligned} a^{3n} &= (a^3-1+1)^{3n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(a^3-1)^k \\ &\geqq (a^3-1)^n + n(a^3-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(a^3-1)^{n-2} \\ &> (a^3-1)^n + 4a^{2n} + \frac{4\times 3}{2}(a^3-1)^{n-2} \\ &\geqq (a^3-1)^n + 4a^{2n} + 6(2^3-1)^{n-2} \\ &> (a^3-1)^n + 4a^{2n} + 8 \end{aligned}$$
$$\therefore\ (a^3-1)^n < a^{3n}-4a^{2n}-8 < a^{3n} = (a^3)^n$$

$n=3$ のとき
$$(a^3-1)^3-(a^9-4a^6-8) = a^6+3a^3+7 > 0$$
$$a^9-4a^6-8-(a^3-2)^3 = 2a^6-12a^3 = 2a^3(a^3-6) \geqq 2a^3(2^3-6) > 0$$
より
$$(a^3-2)^3 < a^9-4a^6-8 < (a^3-1)^3$$

$n=2$ のとき
$$b^2 = a^6-4a^6-8$$
が成り立つと仮定して矛盾を導く。

(i) b が奇数のとき，a も奇数であり，
$$b \equiv 1 \pmod 8,\quad a^6-4a^4-8 \equiv 1-4\cdot 1 \equiv -3 \pmod 8)$$
となって不可能である。

(ii) b が偶数のとき，
$$b=2\beta,\quad a=2\alpha \quad (\beta,\ \alpha \text{は整数})$$
と表されて，
$$(2\beta)^2 = (2\alpha)^6 - 4(2\alpha)^4 - 8$$
$$\therefore\ \beta^2 = 16\alpha^6 - 16\alpha^4 - 2$$
このとき，β は偶数となって左辺は 4 で割り切れるが，右辺は 4 で割り切れないから矛盾する。

以上により，n が 2 以上の整数であるとき，
$$a^{3n}-4a^{2n}-8=b^n$$
を満たす自然数 a, b は存在しない。　　　　(証明おわり)