数チャレ 第92回(2008年9月)

$\dfrac{3a+2}{2a^2+1}$ が整数となるような有理数 a を求めよ。

解答

$\dfrac{3a+2}{2a^2+1}=k$ とおくと，

$$3a+2=k(2a^2+1)$$
$$\therefore\ 2ka^2-3a+(k-2)=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

1° $k=0$ のとき

$$a=-\frac{2}{3}$$

2° $k\neq 0$ のとき

必要条件として，a は実数であるから

$$(\text{判別式})=(-3)^2-4\cdot 2k\cdot(k-2)\geqq 0$$
$$\therefore\ 8k^2-16k-9\leqq 0$$

k は 0 でない整数であるから，

$$8\times(-1)^2-16\times(-1)-9=15>0,$$
$$8\times 0^2-16\times 0-9=-9<0,$$
$$8\times 2^2-16\times 2-9=-9<0,$$
$$8\times 3^2-16\times 3-9=15>0$$

を考え，

$$k=1\ \text{または}\ k=2$$

$(*)$より

$k=1$ のとき $2a^2-3a-1=0$

(判別式) $=17$ は平方数でないから不適。

$k=2$ のとき $4a^2-3a=a(4a-3)=0$

$$\therefore\ a=0,\ \frac{3}{4}$$

以上より，求める有理数は

$$a=-\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{3}{4} \quad (\text{答})$$