数チャレ 第93回 (2008年10月)

素数 $p,\ q$ は $3<p<q$ を満たし，$\dfrac{pq-1}{3-1},\ \dfrac{3q-1}{p-1},\ \dfrac{3p-1}{q-1}$ はいずれも整数となる。素数 $(p,\ q)$ の組をすべて求めよ。

解答

$$l=\frac{pq-1}{3-1},\quad m=\frac{3q-1}{p-1},\quad n=\frac{3p-1}{q-1}$$

とおくと，$p<q$ より

$$n<\frac{3q-1}{q-1}=\frac{3(q-1)+2}{q-1}=3+\frac{2}{q-1}$$

$q-1>2$ であり，n は整数であるから

$$n=1,\ 2,\ 3$$

(i) $n=1$ のとき

$$3p-1=q-1 \qquad \therefore\ q=3p$$

となって，q が素数であることに反する。

(ii) $n=2$ のとき

$$3p-1=2(q-1) \qquad \therefore\ q=\frac{3p+1}{2}$$

これを m の式に代入すると，

$$m=\frac{3q-1}{p-1}=\frac{3(3p+1)-2}{2(p-1)}=\frac{9p+1}{2(p-1)}=\frac{1}{2}\left(9+\frac{10}{p-1}\right)$$

は整数であるから，$\dfrac{10}{p-1}$ が整数となることが必要であり，$p \geqq 5$ より

$$p-1=5\ \text{または}\ 10 \qquad \therefore\ p=6\ \text{または}\ 11$$

p は素数であるから

$$p=11$$

であり，このとき

$$q=\frac{3p+1}{2}=17\,(\text{素数}),\quad m=\frac{1}{2}(9+1)=5,\quad l=\frac{pq-1}{3-1}=93$$

となって，条件をすべて満たす。

(iii) $n=3$ のとき

$$3p-1=3(q-1) \qquad \therefore\ m=\frac{3q-1}{p-1}=\frac{3p+1}{p-1}=3+\frac{4}{p-1}$$

$p \geqq 5,\ p-1 \mid 4$ より $p=5$ に限られるが，$3q=17$ となって不適である。

以上より，求める素数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q)=(11,\ 17) \quad (\text{答})$$