数チャレ 第95回(2008年12月)

x の2次方程式

$$ax^2+(a^2-1)x+a^2+1=0$$

が整数解をもつとき，有理数 a の値を求めよ。

解答

整数解を n とすると，

$$an^2+(a^2-1)n+a^2+1=0$$

これを a について整理すると，

$$(n+1)a^2+n^2a+(1-n) \qquad \cdots\cdots \ (*)$$

(i) $n+1=0$ のとき，$(*)$より

$$a=-2$$

(ii) $n+1\neq 0$ のとき

a の2次方程式$(*)$の判別式を D とすると，

$$D=(n^2)^2-4(n+1)(1-n)=n^4+4n^2-4$$

a は有理数であるから，D が有理数の平方であることが必要であるが，D は整数であるから

$$D=n^4+4n^2-4=m^2$$

を満たす0以上の整数 m が存在する。

$$(n^2+2)^2-8=m^2$$
$$(n^2+2)^2-m^2=8$$
$$\therefore\ (n^2+2+m)(n^2+2-m)=8$$

$n^2+2+m \geqq n^2+2-m$，$n^2+2+m>0$ を考えて，

$$(n^2+2+m,\ n^2+2-m)=(8,\ 1),\ (4,\ 2)$$

$n^2+2+m-(n^2+2-m)=2m$ より2数の偶奇は等しいから

$$n^2+2+m=4,\quad n^2+2-m=2$$

の場合に絞られ，$n+1\neq 0$ も考えると

$$m=1,\ n^2=1 \qquad \therefore\ n=1$$

このとき整数解1をもつから十分であり，$(*)$は

$$2a^2+a=a(2a+1)=0$$

となるから，$a\neq 0$ より

$$a=-\frac{1}{2}$$

以上より，求める有理数 a は

$$a=-2,\ -\frac{1}{2} \quad (答)$$