数チャレ 第98回(2009年3月)

自然数 a, b, c, d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

(1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。

(2) a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p = 5$ であることを示せ。ただし，2 つの自然数が互いに素とは，1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

出典：2009 年 千葉大学

解答

$$\begin{cases} c = 4a + 7b & \cdots\cdots ① \\ d = 3a + 4b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(1) ①，②より

$$\begin{aligned} c + 3d &= (4a + 7b) + 3(3a + 4b) \\ &= 13a + 19b \\ &= 4(2a + b) + 5(a + 3b) \end{aligned}$$

であるから，

$c + 3d$ が 5 の倍数

ならば，

$4(2a + b)$ は 5 の倍数

であり，5 と 4 は互いに素であるから

$2a + b$ は 5 の倍数

である。 (証明おわり)

(2) ② $\times 7 -$ ① $\times 4$ より

$$5a = 7d - 4c \quad \cdots\cdots ③$$

① $\times 3 -$ ② $\times 4$ より

$$5b = 3c - 4d \quad \cdots\cdots ④$$

c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，③，④より

$5a$，$5b$ はともに p の倍数

である。$p \neq 5$ とすれば，素数 p は a と b の公約数となり，a と b が互いに素であることに反するから

$$p = 5$$

である。 (証明おわり)