数チャレ 第102回(2009年7月)

(1) n を3以上の自然数であるとし，n 以下の素数を p_1，p_2，$\cdots$，p_r とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \sum_{k_1=0}^{n}\frac{1}{{p_1}^{k_1}}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{{p_2}^{k_2}}\times\cdots\times\sum_{k_r=0}^{n}\frac{1}{{p_r}^{k_r}}$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1)を用いて，素数が無数にあることを示せ。

解答

(1) n 以下の任意の自然数 k の素因数は p_1，p_2，$\cdots$，p_r に限られるから，

$$k = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_r}^{e_r} \quad (e_i\text{は非負整数})$$

と表される。任意の自然数 m に対して $m \leqq 2^m$ が成り立つ(厳密には帰納法による)から，$p_i \geqq 2$ より

$$n \leqq 2^n \leqq p_i^n$$

であり，各指数 e_i は $0 \leqq e_i \leqq n$ である。各 k に対して素因数分解は相異なるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \sum_{k_1=0}^{n}\frac{1}{{p_1}^{k_1}}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{{p_2}^{k_2}}\times\cdots\times\sum_{k_r=0}^{n}\frac{1}{{p_r}^{k_r}}$$

(証明おわり)

(2) 素数が有限個のp_1，p_2，$\cdots$，p_r しかないとすれば，(1)より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \sum_{k_1=0}^{n}\frac{1}{{p_1}^{k_1}}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{{p_2}^{k_2}}\times\cdots\times\sum_{k_r=0}^{n}\frac{1}{{p_r}^{k_r}} \leqq \left(\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2^m}\right)^r$$

$0 < \dfrac{1}{2} < 1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\right)^r = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^r = 2^r$$

ところが，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} &= 1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{1}{k}\\ &> 1 + \sum_{m=1}^{n}(2^m - 2^{m-1})\frac{1}{2^m} = 1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}\end{aligned}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

であるから，矛盾する。よって，素数は無数にある。(証明おわり)

(注) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$ は定積分を用いて導いてもよい。