第 1 問 の 解 答

(1) C_3 は C_1 に内接するから

$$a^2 + b^2 = (2-t)^2 \quad (0 < t < 2) \qquad \cdots\cdots ①$$

C_3 は C_2 と外接するから

$$(a-1)^2 + b^2 = (1+t)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ②より

$$2a - 1 = 3 - 6t \qquad \therefore\ a = -3t + 2 \quad (答)$$

①より

$$b^2 = (2-t)^2 - (-3t+2)^2 = 8t(1-t)$$

$b > 0$ かつ $0 < t < 2$ より

$$b = 2\sqrt{2}\sqrt{t(1-t)},\quad 0 < t < 1 \quad (答)$$

(2) (1)より

$$b = 2\sqrt{2}\sqrt{t(1-t)} = 2\sqrt{2}\sqrt{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (0 < t < 1)$$

であるから,

$$t = \frac{1}{2}\ のとき最大値\ \sqrt{2} \quad (答)$$

をとる。

第 2 問 の 解 答

(1) mが素数ならば，1以上$m-1$以下の任意の整数rに対して，mとrは互いに素である。さらに，

$$ {}_m\mathrm{C}_r = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{m}{r}\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1} $$

において${}_m\mathrm{C}_r$，${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}$はともに整数であるから，rは${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}$を割ることになり，${}_m\mathrm{C}_r$はmで割り切れる。よって，最大公約数d_mはmの倍数である。

一方，d_mは${}_m\mathrm{C}_1 = m$の約数であるから，mが素数ならば，$d_m = m$である。

(証明おわり)

(2) すべての自然数kに対し，

$k^m - k$がd_mで割り切れる …… $(*)$

ことをkに関する数学的帰納法で示す。

(i) $1^m - 1 = 0$はd_mで割り切れるから，$k=1$のとき$(*)$は成り立つ。

(ii) $k=n$のとき$(*)$が成り立つとする。すなわち，

$n^m - n$がd_mで割り切れる

とする。二項定理より

$$ (n+1)^m = 1 + {}_m\mathrm{C}_1\cdot n + {}_m\mathrm{C}_2\cdot n^2 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\cdot n^{m-1} + n^m $$

$$ \therefore\ (n+1)^m-(n+1) = {}_m\mathrm{C}_1\cdot n + {}_m\mathrm{C}_2\cdot n^2 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\cdot n^{m-1} + (n^m-n) $$

d_mの定義より${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$はそれぞれd_mで割り切れ，帰納法の仮定よりn^m-nはd_mで割り切れるから，$(n+1)^m-(n+1)$もd_mで割り切れることになり，$k=n+1$のときも$(*)$が成り立つ。

(i), (ii)より，すべての自然数kに対し，k^m-kはd_mで割り切れる。

(証明おわり)

第 3 問 の 解 答

(1) 操作(A)を 5 回おこなったとき，L に 4 色すべての玉が入っているのは，ある色の玉が 2 回出て，あとの 3 色の玉が 1 回ずつ出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 4 \times (5 \times 4 \times 3) = \frac{15}{64}$$

操作(B)を 5 回おこなったとき，R に 4 色すべての玉が入っている確率も同じ値であるから，求める確率 P_1 は

$$\mathrm{P}_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \frac{225}{4096} \quad \text{(答)}$$

(2) 操作(C)を 5 回おこなったとき，L に 4 色すべての玉が入っているのは (1)の状況と同じであるから，その確率 P_2 は

$$\mathrm{P}_2 = \frac{15}{64} \quad \text{(答)}$$

(3) 操作(C)を 10 回おこなったとき，L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは，どの色も 2 回以上出る場合である。4 色の玉の出る回数の組合せは

$$2+2+2+4 \text{ または } 2+2+3+3$$

であり，色と出方の順序も考えて，確率 P_3 は

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_3 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times (4 \times {}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot {}_6\mathrm{C}_3) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times {}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot (4 \cdot 15 + 6 \cdot 20) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times 45 \times 28 \times 180\end{aligned}$$

(1)の結果との比をとって

$$\frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{P}_1} = \frac{45 \times 28 \times 180}{(4^2 \times 5 \times 3)^2} = \frac{63}{16} \quad \text{(答)}$$

第 4 問 の 解 答

(1) $f(0)=c=0,\ f(2)=4a+2b+c=2$ のとき

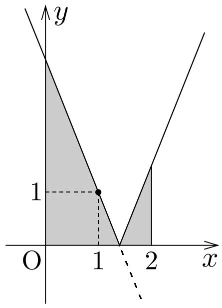
$$c=0,\ b=1-2a$$

$$\therefore\ f(x)=ax^2-(2a-1)x=x\{ax-(2a-1)\}$$

x で微分して

$$f'(x)=2ax-(2a-1)=2a(x-1)+1$$

(i) $2a \leqq -1$ のとき



$$S=\int_0^{\frac{2a-1}{2a}} f'(x)\,dx+\int_{\frac{2a-1}{2a}}^{2}\{-f'(x)\}\,dx$$

$$=\Big[\,f(x)\,\Big]_0^{\frac{2a-1}{2a}}+\Big[-f(x)\Big]_{\frac{2a-1}{2a}}^{2}$$

$$=2f\left(\frac{2a-1}{2a}\right)-f(0)-f(2)$$

$$=2\cdot\frac{2a-1}{2a}\left\{a\cdot\frac{2a-1}{2a}-(2a-1)\right\}-0-2$$

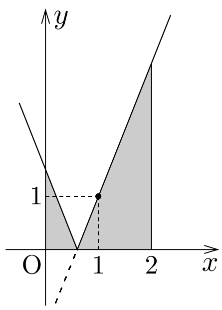
$$=-\frac{(2a-1)^2}{2a}-2=-2a-\frac{1}{2a}$$

(ii) $-1 \leqq 2a \leqq 1$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ においてつねに $f'(x) \geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^2 f'(x)\,dx=f(2)-f(0)=2$$

(iii) $2a \geqq 1$ のとき



$$S=\int_0^{\frac{2a-1}{2a}}\{-f'(x)\}\,dx+\int_{\frac{2a-1}{2a}}^{2} f'(x)\,dx$$

$$=2a+\frac{1}{2a}$$

以上をまとめて，

$$S=\begin{cases} -2a-\dfrac{1}{2a} & \left(a \leqq -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2 & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 2a+\dfrac{1}{2a} & \left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad (答)$$

(2)　$|a| \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，相加・相乗平均の不等式より

$$S = 2|a| + \frac{1}{2|a|} \geqq 2\sqrt{2|a| \cdot \frac{1}{2|a|}} = 2$$

であり，$|a| \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S = 2$ であるから，

S の最小値は 2　(答)

である。