

第 1 問

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また、点 (a, b) を中心とする半径 t の円 C_3 が、 C_1 に内接し、かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし、 b は正の実数とする。

- (1) a, b を t を用いて表せ。また、 t がとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき、 b の最大値を求めよ。

第 2 問

自然数 $m \geq 2$ に対し, $m - 1$ 個の二項係数

$${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$$

を考え, これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

- (1) m が素数ならば, $d_m = m$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れることを, k に関する数学的帰納法によって示せ。

第 3 問

スイッチを1回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が1個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2つの箱 L と R を用意する。次の3種類の操作を考える。

- (A) 1回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
- (B) 1回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
- (C) 1回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあればその玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を5回おこない、さらに操作(B)を5回おこなう。このとき L にも R にも4色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を5回おこなう。このとき L に4色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を10回おこなう。このとき L にも R にも4色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

第 4 問

2次以下の整式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対し

$$S = \int_0^2 |f'(x)| dx$$

を考える。

- (1) $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ のとき S を a の関数として表せ。
- (2) $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ をみたしながら f が変化するとき, S の最小値を求めよ。