

第 1 問 の 解 答

- (1) m が素数ならば, 1 以上 $m-1$ 以下の任意の整数 r に対して, m と r は互いに素である。さらに,

$${}_m C_r = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{m}{r} {}_{m-1} C_{r-1}$$

において ${}_m C_r$, ${}_{m-1} C_{r-1}$ はともに整数であるから, r は ${}_{m-1} C_{r-1}$ を割ることになり, ${}_m C_r$ は m で割り切れる。よって, 最大公約数 d_m は m の倍数である。

一方, d_m は ${}_m C_1 = m$ の約数であるから, m が素数ならば, $d_m = m$ である。

(証明おわり)

- (2) すべての自然数 k に対し,

$$k^m - k \text{ が } d_m \text{ で割り切れる} \quad \dots\dots (*)$$

ことを k に関する数学的帰納法で示す。

(i) $1^m - 1 = 0$ は d_m で割り切れるから, $k = 1$ のとき(*)は成り立つ。

(ii) $k = n$ のとき(*)が成り立つとする。すなわち,

$$n^m - n \text{ が } d_m \text{ で割り切れる}$$

とする。二項定理より

$$(n+1)^m = 1 + {}_m C_1 \cdot n + {}_m C_2 \cdot n^2 + \cdots + {}_m C_{m-1} \cdot n^{m-1} + n^m$$

$$\therefore (n+1)^m - (n+1) = {}_m C_1 \cdot n + {}_m C_2 \cdot n^2 + \cdots + {}_m C_{m-1} \cdot n^{m-1} + (n^m - n)$$

d_m の定義より ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ はそれぞれ d_m で割り切れ, 帰納法の仮定より $n^m - n$ は d_m で割り切れるから, $(n+1)^m - (n+1)$ も d_m で割り切れることになり, $k = n+1$ のときも(*)が成り立つ。

(i), (ii)より, すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ は d_m で割り切れる。

(証明おわり)

- (3) (*)が $k = 0$ でも成り立つことに注意すると,

$$(d_m - 1)^m - (d_m - 1) \text{ は } d_m \text{ で割り切れる。}$$

二項定理と m が偶数であることより

$$(d_m - 1)^m - (d_m - 1) = \sum_{r=1}^m {}_m C_r d_m^r (-1)^{m-r} + (-1)^m - d_m + 1$$

$$= d_m \left\{ \sum_{r=1}^m {}_m C_r d_m^{r-1} (-1)^{m-r} - 1 \right\} + (-1)^m + 1$$

$$= d_m \left\{ \sum_{r=1}^m {}_m C_r d_m^{r-1} (-1)^{m-r} - 1 \right\} + 2$$

と表されるから d_m は 2 の約数, したがって $d_m (> 0)$ は 1 または 2 である。

(証明おわり)

第 2 問 の 解 答

(1) (ii) および $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ より

$$A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$$

両辺左から $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかけて

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, B の定め方より

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)^n \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

(ii) および $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ より

$$A^n P = A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & s^n r \\ y_n & s^n \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} &= B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}A^nP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & s^n r \\ y_n & s^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n - r y_n \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, (iii) より $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$$

(証明おわり)

(3) $a - cr = t$ とおくと,

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}$$

$$B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ c(t+s) \end{pmatrix}$$

$$B^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ c(t+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ c(t^2 + st + s^2) \end{pmatrix}$$

$$B^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \\ c(t^{k-1} + st^{k-2} + \dots + s^{k-2}t + s^{k-1}) \end{pmatrix} \text{であるとすれば}$$

$$B^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^k \\ c(t^{k-1} + st^{k-2} + \dots + s^{k-2}t + s^{k-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^{k+1} \\ c(t^k + st^{k-1} + \dots + s^{k-1}t + s^k) \end{pmatrix}$$

となるから, 一般に

$$B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n \\ c(t^{n-1} + st^{n-2} + \dots + s^{n-2}t + s^{n-1}) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

(2)より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(t^{n-1} + st^{n-2} + \dots + s^{n-2}t + s^{n-1}) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①より

$$-1 < t = a - cr < 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であるが, (i)より $s > 1$ であるから特に $t \neq s$ であり,

$$c(t^{n-1} + st^{n-2} + \dots + s^{n-2}t + s^{n-1}) = c \cdot \frac{t^n - s^n}{t - s}$$

ここで, $c \neq 0$ ならば, ①と $s > 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \frac{t^n - s^n}{t - s}$ は発散するから, ②より

$$c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③かつ④より

$$c = 0 \text{ かつ } |a| < 1 \quad \text{(証明おわり)}$$

第 3 問 の 解 答

- (1) 操作(A)を 5 回おこなったとき, L に 4 色すべての玉が入っているのは, ある色の玉が 2 回出て, あとの 3 色の玉が 1 回ずつ出る場合であるから, その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 4 \times (5 \times 4 \times 3) = \frac{15}{64}$$

操作(B)を 5 回おこなったとき, R に 4 色すべての玉が入っている確率も同じ値であるから, 求める確率 P_1 は

$$P_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \frac{225}{4096} \quad (\text{答})$$

- (2) 操作(C)を 5 回おこなったとき, L に 4 色すべての玉が入っているのは (1) の状況と同じであるから, その確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{15}{64} \quad (\text{答})$$

- (3) 操作(C)を 10 回おこなったとき, L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは, どの色も 2 回以上出る場合である。4 色の玉の出る回数の組合せは

$$2 + 2 + 2 + 4 \quad \text{または} \quad 2 + 2 + 3 + 3$$

であり, 色と出方の順序も考えて, 確率 P_3 は

$$\begin{aligned} P_3 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times (4 \times {}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 + {}_4C_2 \times {}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_3) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times {}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot (4 \cdot 15 + 6 \cdot 20) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times 45 \times 28 \times 180 \end{aligned}$$

(1) の結果との比をとって

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{45 \times 28 \times 180}{(4^2 \times 5 \times 3)^2} = \frac{63}{16} \quad (\text{答})$$

第 4 問 の 解 答

(1) 平面 $y = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) による D_1 の切り口は

$$\text{線分 } -\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2}, z = a$$

これを y 軸を中心として $x > 0$ の側に, D_2 の切り口

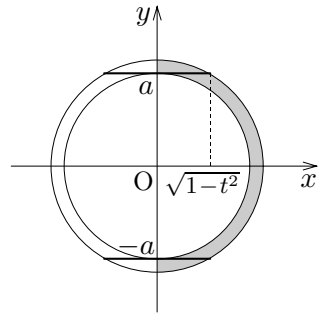
$$-\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2}, z = -a$$

に重なるまで回転させるときの通過領域が E の断面であり, そのうち $x \geq 0$ の部分は半径 $\sqrt{1-t^2+a^2}$ と半径 a の同心円ではさまれた領域の $x \geq 0$ の部分である。その断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \{ \pi(1-t^2+a^2) - \pi a^2 \} = \frac{\pi}{2}(1-t^2)$$

よって, 求める体積 $W(a)$ は

$$\begin{aligned} W(a) &= \int_{-1}^1 S(t) dt = -\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (t+1)(t-1) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} (1+1)^3 = \frac{2}{3} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 立体 E の平面 $y = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) による断面の $x \leq 0$ の部分は $y \geq a$ と $y \leq -a$ の 2ヶ所にあり, いずれも $(\sqrt{1-t^2+a^2} - a) \times \sqrt{1-t^2}$ の長方形でおさえることができ, E の断面積 $T(t)$ は

$$S(t) \leq T(t) \leq S(t) + 2(\sqrt{1-t^2+a^2} - a)\sqrt{1-t^2}$$

と評価することができる。

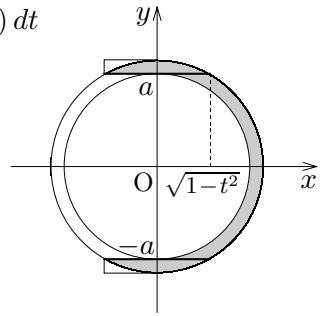
$$W(a) = \int_{-1}^1 S(t) dt = \frac{2}{3} \pi, \quad V(a) = \int_{-1}^1 T(t) dt$$

であるから, 定積分の性質より

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi &\leq V(a) \leq \frac{2}{3} \pi + 2 \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2+a^2} - a) \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi + 2 \int_{-1}^1 \frac{1-t^2+a^2-a^2}{\sqrt{1-t^2+a^2}+a} \sqrt{1-t^2} dt \\ &\leq \frac{2}{3} \pi + 2 \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{0+a^2}+a} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{a} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \end{aligned}$$

$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = 0$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \frac{2}{3} \pi \quad (\text{答})$$



第 5 問 の 解 答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \log(1+x)^{\frac{1}{x}} - \log(1-x)^{1-\frac{1}{x}} &= \frac{1}{x} \log(1+x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \log(1-x) \\
 &= \frac{\log(1+x) + (1-x) \log(1-x)}{x} \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

であることを考え,

$$f(x) = \log(1+x) + (1-x) \log(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \log(1-x) + (1-x) \cdot \frac{-1}{1-x} \\
 &= \frac{1}{1+x} - \log(1-x) - 1 \\
 f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{1-x} \\
 &= \frac{-(1-x) + (1+x)^2}{(1+x)^2(1-x)} = \frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}
 \end{aligned}$$

$-1 < x < 1$ において $f''(x)$ は x と同符号であるから

x	(-1)	0	(1)
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	\searrow	0	\nearrow

特に, $x \neq 0$ (かつ $-1 < x < 1$) において $f'(x) > 0$ であるから, $f(x)$ は $-1 < x \leq 0$ および $0 \leq x < 1$ において狭義単調増加である。 $f(0) = 0$ より

$$-1 < x < 0 \text{ のとき } f(x) < 0, \quad 0 < x < 1 \text{ のとき } f(x) > 0$$

であるから, ① および (底) $= e > 1$ より

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (-1 < x < 1, x \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

(証明おわり)

(注) $f(x)$ 自体は $x = 0$ でも定義されている関数である。

(2) ② に $x = -0.01 = -\frac{1}{100}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 1.01^{101} &< 0.99^{-100} = 0.99^{1-101} \\
 \therefore (1.01 \times 0.99)^{101} &= 0.9999^{101} < 0.99 \quad \dots\dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

② に $x = 0.01 = \frac{1}{100}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 0.99^{1-100} &< 1.01^{100} \\
 \therefore 0.99 &< (0.99 \times 1.01)^{100} = 0.9999^{100} \quad \dots\dots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

③, ④より

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100} \quad \text{(証明おわり)}$$

第 6 問 の 解 答

$$(1) \overrightarrow{A_1P_1(t)} = t\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{A_1P_2(t)} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_2(t)} = \vec{a}_1 + t\vec{e}_2 \text{ より}$$

$$\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)} = \overrightarrow{A_1P_2(t)} - \overrightarrow{A_1P_1(t)} = \vec{a}_1 - t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$$

仮定より

$$d(P_1(t), P_2(t)) = |\vec{a}_1 - t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)| \leq 1 \quad \dots\dots ①$$

を満たす実数 t が存在する。 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と \vec{a}_1 のなす角は θ であるから

$$\begin{aligned} |\vec{a}_1 - t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)|^2 &= |\vec{a}_1|^2 - 2t\vec{a}_1 \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + t^2|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2 \\ &= |\vec{a}_1|^2 - 2t|\vec{a}_1||\vec{e}_1 - \vec{e}_2| \cos \theta + t^2|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2 \\ &= (t|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| - |\vec{a}_1| \cos \theta)^2 + |\vec{a}_1|^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= (t|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| - |\vec{a}_1| \cos \theta)^2 + |\vec{a}_1|^2 \sin^2 \theta \\ &\geq |\vec{a}_1|^2 \sin^2 \theta \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②より

$$|\vec{a}_1| |\sin \theta| \leq 1 \quad \therefore |\sin \theta| \leq \frac{1}{|\vec{a}_1|} = \frac{1}{1000} \quad (\text{証明おわり})$$

(注) 問題文には「なす角度を θ 」と定めておきながら, $\sin \theta$ に絶対値をつけているので, ひょっとしたら出題者は「 \vec{a}_1 に対する $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ の方向角を θ とする」つもりで述べているかもしれない。

$$(2) \vec{a}_1, \vec{e}_1, -\vec{e}_2 \text{ の始点をそろえたとき, } \vec{a}_1 \text{ を始線とする } \vec{e}_1 \text{ の方向角は } \theta_1, \quad -\vec{e}_2 \text{ の方向角は}$$

$$\frac{2}{3}\pi + \theta_2 - \pi = \theta_2 - \frac{\pi}{3}$$

であるから, $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ の方向角は

$$\frac{1}{2} \left\{ \theta_1 + \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3} \right) \right\} = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - \frac{\pi}{6}$$

であり, (1)より

$$\begin{aligned} -\alpha &\leq \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \frac{\pi}{6} \leq \alpha \\ \therefore \frac{\pi}{3} - 2\alpha &\leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad (\text{答}) \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

(3) (2)と同様にして

$$\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_2 + \theta_3 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad \dots\dots ④$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_3 + \theta_1 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad \dots\dots ⑤$$

④より

$$-\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq -\theta_2 - \theta_3 \leq -\frac{\pi}{3} + 2\alpha$$

③, ⑤を辺々加えて

$$\frac{\pi}{3} - 6\alpha \leq 2\theta_1 \leq \frac{\pi}{3} + 6\alpha$$

$$\frac{\pi}{6} - 3\alpha \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{6} + 3\alpha$$

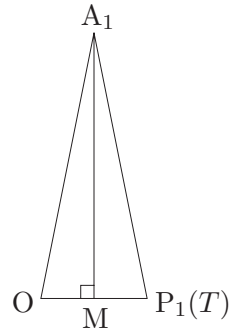
$$\therefore \angle OA_1P_1(T) = \left| \theta_1 - \frac{\pi}{6} \right| \leq 3\alpha$$

正三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ に正弦定理を適用すると

$$OA_1 = \frac{A_1A_2}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1000}{\sqrt{3}} = A_1P_1(T)$$

 $OP_1(T)$ の中点を M とすると,

$$\begin{aligned} d(P_1(T), O) &= 2OA_1 \sin \frac{1}{2} \angle OA_1P_1(T) \\ &\leq \frac{2000}{\sqrt{3}} \sin \frac{3}{2} \alpha \\ &\leq \frac{2000}{\sqrt{3}} \sin 2\alpha \\ &= \frac{4000}{\sqrt{3}} \sin \alpha \cos \alpha \\ &\leq \frac{4000}{\sqrt{3}} \sin \alpha \\ &= \frac{4000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 3 \end{aligned}$$



(証明おわり)