第　1　問

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$$ {}_m\mathrm{C}_1,\quad {}_m\mathrm{C}_2,\quad \cdots,\quad {}_m\mathrm{C}_{m-1} $$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

第　2　問

実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件(i), (ii), (iii)をみたすとする。

(i)　$s > 1$

(ii)　$A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii)　$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$　$(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ。

(1)　$B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2)　$B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$　$(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3)　$c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

◇M4(376—58)

第　3　問

スイッチを1回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が1個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2つの箱LとRを用意する。次の3種類の操作を考える。

(A)　1回スイッチを押し，出てきた玉をLに入れる。

(B)　1回スイッチを押し，出てきた玉をRに入れる。

(C)　1回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，Lになければその玉をLに入れ，Lにあればその玉をRに入れる。

(1) LとRは空であるとする。操作(**A**)を5回おこない，さらに操作(**B**)を5回おこなう。このときLにもRにも4色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) LとRは空であるとする。操作(**C**)を5回おこなう。このときLに4色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) LとRは空であるとする。操作(**C**)を10回おこなう。このときLにもRにも4色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

第　4　問

aを正の実数とし，空間内の2つの円板

$$D_1 = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ z = a\},$$

$$D_2 = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ z = -a\}$$

を考える。D_1をy軸の回りに$180°$回転してD_2に重ねる。ただし回転はz軸の正の部分をx軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間にD_1が通る部分をEとする。Eの体積を$V(a)$とし，Eと$\{(x,\ y,\ z) \mid x \geqq 0\}$との共通部分の体積を$W(a)$とする。

(1)　$W(a)$を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a \to \infty} V(a)$を求めよ。

第　5　問

(1)　実数 x が $-1 < x < 1$，$x \neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

第　6　問

平面上の 2 点 P，Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ がある。$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の内部に 3 点 B_1，B_2，B_3 を，$d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n) = 1$（$n = 1$，2，3）となるようにとる。また，

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2},\quad \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3},\quad \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1}$$
$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1},\quad \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2},\quad \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}$$

とおく。$n = 1$，2，3 のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発し，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1)　ある時刻 t で $d(\mathrm{P}_1(t),\ \mathrm{P}_2(t)) \leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ と，ベクトル $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta| \leqq \dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2)　角度 θ_1，θ_2，θ_3 を $\theta_1 = \angle \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\theta_2 = \angle \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$，$\theta_3 = \angle \mathrm{B}_3\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$ によって定義する。α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha = \dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1 + \theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ。

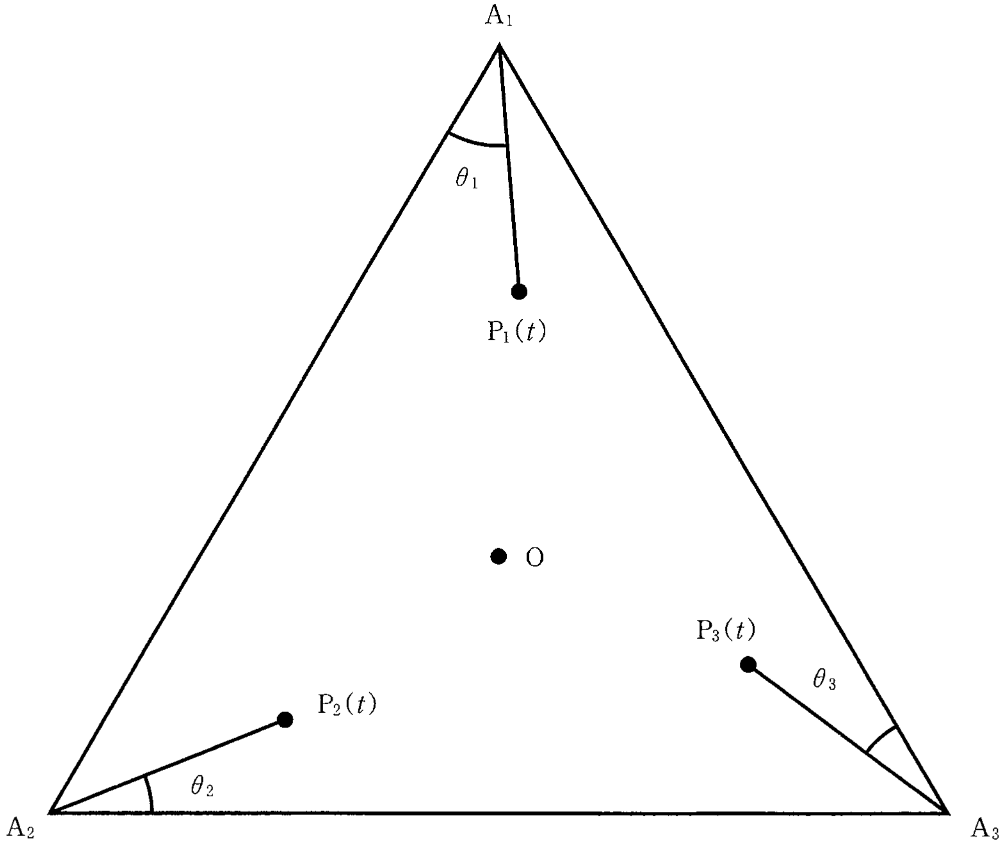
(3)　時刻 t_1，t_2，t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P}_2(t_1),\ \mathrm{P}_3(t_1)) \leqq 1,\quad d(\mathrm{P}_3(t_2),\ \mathrm{P}_1(t_2)) \leqq 1,\quad d(\mathrm{P}_1(t_3),\ \mathrm{P}_2(t_3)) \leqq 1$$

このとき，時刻 $T = \dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O}) \leqq 3,\quad d(\mathrm{P}_2(T),\ \mathrm{O}) \leqq 3,\quad d(\mathrm{P}_3(T),\ \mathrm{O}) \leqq 3$$

が成立することを示せ。


A_1
θ_1
$P_1(t)$
O
$P_3(t)$
θ_3
$P_2(t)$
θ_2
A_2
A_3