1.

(1) α は 2 次方程式 $t^2 - t - 1 = 0$ の解であるから

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

両辺に α^n をかけて

$$\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} - \alpha^n = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

解 β についても同様に

$$\beta^{n+2} - \beta^{n+1} - \beta^n = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①と②の辺々を加えて

$$s_{n+2} - s_{n+1} - s_n = 0$$

(証明おわり)

(2) (1)で示した漸化式を用いて

$$\begin{aligned} s_5 = s_4 + s_3 &= (s_3 + s_2) + s_3 \\ &= 2s_3 + s_2 \\ &= 2(s_2 + s_1) + s_2 \\ &= 3s_2 + 2s_1 \\ &= 3(s_1 + s_0) + 2s_1 \\ &= 5s_1 + 3s_0 \\ &= 5(\alpha + \beta) + 3 \times (1 + 1) \\ &= 5 \times 1 + 3 \times 2 \\ &= 11 \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(注) (1)は

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$$

と変形して，解と係数の関係を用いてもよい。

2．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の両辺の大きさを考えて，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$

$$4^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\times30+5^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=51$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{51}\quad\text{(答)}$$

△OAB の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\times51-30^2}\\&=\frac{5}{2}\sqrt{51-36}\\&=\frac{5\sqrt{15}}{2}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

3．2 点間の距離を計算すると

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2^2+2^2+(2\sqrt{2}\,)^2}=2\sqrt{1+1+2}=4$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{1+1+2}=3$$

$$\mathrm{CA}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+98}=5$$

球が外接することより

$$\begin{cases}a+b=\mathrm{AB}=4 & \cdots\cdots\ ①\\ b+c=\mathrm{BC}=3 & \cdots\cdots\ ②\\ c+a=\mathrm{CA}=5 & \cdots\cdots\ ③\end{cases}$$

① + ② + ③ より

$$2a+2b+2c=12\qquad\therefore\ a+b+c=6\qquad\cdots\cdots\ ④$$

④ − ②，④ − ③，④ − ① より

$$a=3,\ b=1,\ c=2\quad\text{(答)}$$

4．P$(p,\ -p^2)$, Q$(q,\ (q-4)^2-1)$ とおく。

接線が平行であることより

$$-2p = 2(q-4) \qquad \therefore\ p+q=4 \qquad \cdots\cdots ①$$

直線 PQ が法線であることより

$$1\cdot(p-q)-2p\left\{-p^2-(q-4)^2+1\right\}=0$$

$$\therefore\ p-q+2p\left\{p^2+(q-4)^2-1\right\}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ② より q を消去して

$$p+(p-4)+2p\{p^2+(-p)^2-1\}=0$$

$$p-2+p(2p^2-1)=0$$

$$2p^3-2=0$$

$$2(p-1)(p^2+p+1)=0$$

$p^2+p+1=\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$$p=1$$

①より

$$q=3$$

2点 P, Q の座標は

P$(1,\ -1)$, Q$(3,\ 0)$ (答)