

1.

- (1) 直線 $y = x - a$ と円周 $x^2 + y^2 = 1$ との交点を P, Q ($x_Q < x_P$) とし, $y = |x - a|$ のグラフと円周 $x^2 + y^2 = 1$ との交点のうち P でない方を R とする。

$$\begin{cases} y = x - a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{より } y \text{ を消去すると}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (x - a)^2 &= 1 \\ 2x^2 - 2ax + (a^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

図形的に考えて

$$x_P = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

$$x_Q = x_R = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

$$y_P = x_P - a = \frac{-a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

$$y_R = -y_Q = -x_Q + a = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}) \text{ より}$$

$$M\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2 - a^2}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

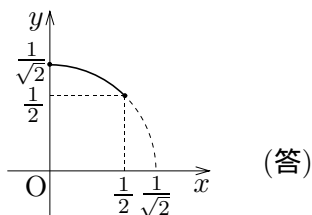
- (2) $M(x, y)$ とおくと

$$x = \frac{a}{2} \text{ かつ } y = \frac{\sqrt{2 - a^2}}{2} \text{ かつ } 0 \leq a \leq 1$$

$a = 2x$ を他の 2 式に代入して a を消去すると

$$y = \frac{\sqrt{2 - (2x)^2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \text{ かつ } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

となるから, M の軌跡は次図のようになる。



2.

(1) D は BC を 2 : 3 に内分するから

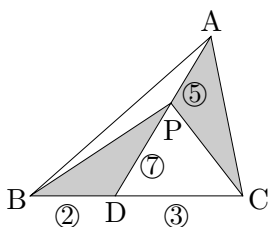
$$\overrightarrow{PD} = \frac{3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{PB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PC} \quad (\text{答})$$

(2) $7\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ と (1) より

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}) = -\frac{7}{5}\overrightarrow{PA}$$

よって, 3 点 A, P, D は同一直線上にある。

(証明おわり)

(3) $\overrightarrow{PD} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{PA}$ より, P は AD を 5 : 7 に内分する。 $\triangle ADC$ の面積を S とおくと

$$\triangle PBD = \frac{2}{3}S, \quad \triangle PCA = \frac{5}{7}S$$

であるから,

$$\triangle PBD : \triangle PCA = \frac{2}{3}S : \frac{5}{7}S = 14 : 15 \quad (\text{答})$$

3.

(1) 食塩の量に注目すると, 1 回ごとに $\frac{1}{4}$ を取り除き, 3g の食塩を加えるから,

$$4a_{n+1} = 4a_n \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 3$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{3}{4} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(2) $\alpha = \frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{4}$ とおくと $\alpha = 3$ であるから,

$$3 = \frac{3}{4} \times 3 + \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ②より

$$a_{n+1} - 3 = \frac{3}{4}(a_n - 3)$$

$\{a_n - 3\}$ は初項 $a_0 - 3 = 12 - 3 = 9$, 公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$a_n - 3 = 9\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \therefore a_n = 3 + 9\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (\text{答})$$

(3) (2)より

$$a_n = 3 + 9\left(\frac{3}{4}\right)^n < 6 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{3}$$

である。

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} > \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} < \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$$

であるから, $a_n < 6$ となるような最小の n は

$$n = 4 \quad (\text{答})$$

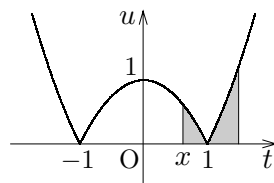
である。

4. $0 \leq x \leq 1$ より

$$x \leq 1 \leq x+1$$

であるから,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 (-t^2 + 1) dt + \int_1^{x+1} (t^2 - 1) dt \\ &= \int_1^x (t^2 - 1) dt + \int_1^{x+1} (t^2 - 1) dt \end{aligned}$$

 x で微分して

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^2 - 1 + (x+1)^2 - 1 \\ &= 2x^2 + 2x - 1 \\ &= 2 \left\{ \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right\} \\ &= 2 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ において $F'(x)$ は $x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ と同符号であるから, $F(x)$ の増減は

x	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	\searrow	極小	\nearrow

よって, $F(x)$ は

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (\text{答})$$

において最小となる。

(参考)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 (-t^2 + 1) dt + \int_1^{x+1} (t^2 - 1) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t \right]_x^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t \right]_1^{x+1} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3}(x+1)^3 - (x+1) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{2}{3} \\ &= \left(x^2 + x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) - x + \frac{5}{6} \end{aligned}$$

より

$$F\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.

(1) $Q(x, y)$ とおくと, $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$ より

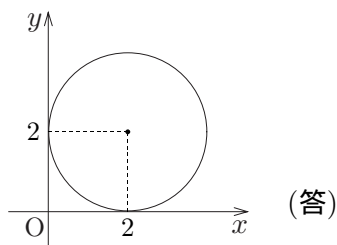
$$P\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$

点 P は中心 (1, 1), 半径 1 の円周上を動くから

$$\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 = 1^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

点 Q の軌跡 D を図示すると, 次図のようになる。



(2)

$$C : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$D : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$2x + 2y - 6 = -3 \quad \therefore y = -x + \frac{3}{2}$$

①に代入して, y を消去すると

$$(x - 1)^2 + \left(-x + \frac{3}{2} - 1\right)^2 = 1$$

$$2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{4} \quad (\text{答})$$

2. 45 を引いて得られる平方数を m^2 (m は自然数), 44 を足して得られる平方数を n^2 (n は自然数) とすると,

$$m^2 + 45 = n^2 - 44$$

$$n^2 - m^2 = 89$$

$$\therefore (n + m)(n - m) = 89$$

89 は素数であり,

$$n + m > 0, \quad n + m > n - m$$

であるから,

$$n + m = 89, \quad n - m = 1$$

$$\therefore m = 44, \quad n = 45$$

求める自然数は

$$44^2 + 45 = 45^2 - 44 = 1981 \quad (\text{答})$$

3.

(1) $e^x > 0$ より, $y = e^x$ と $y = a\sqrt{x}$ が共有点をもつには

$$a > 0$$

が必要である。このとき, $y = a\sqrt{x}$ は上に凸であるから, ただ一つの共有点は接点である。

$x = t$ において接するとすれば,

$$\begin{cases} e^t = a\sqrt{t} & \dots\dots \textcircled{1} \\ e^t = \frac{a}{2\sqrt{t}} & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① ÷ ② より

$$1 = 2t \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

① (または②) より

$$a = \frac{e^t}{\sqrt{t}} = \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2e} \quad (\text{答})$$

$$\text{共有点の座標は} \left(\frac{1}{2}, \sqrt{e} \right) \quad (\text{答})$$

(2) 2つの曲線 $y = e^x$, $y = \sqrt{2ex}$ と y 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^x - \sqrt{2e} x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \left[e^x - \frac{2\sqrt{2e}}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{2\sqrt{2e}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{e}}{3} - 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

4.

(1) 仮定の 2 つの式を 1 つにまとめると

$$A \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = ab - 1 \neq 0 \text{ のとき}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

が存在するから, 両辺右からかけて

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} b-a & a^2-1 \\ b^2-1 & a-b \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $ab = 1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ ab \end{pmatrix} = aA \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$a^2 = 1 \text{ かつ } a = b \quad \therefore a = b = 1 \quad (\text{答})$$

このとき, 条件は $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, 条件を満たす行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

など 2 個以上ある。

(証明おわり)

(注) 「 a, b は実数」の仮定がなくても結果は同じである。