1

(1) $8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5$ を変形して

$$8(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 5 + 16\sin^2 x\cos^2 x$$
$$8 = 5 + 4\sin^2 2x$$
$$\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} \qquad \therefore\ \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$0 \leqq 4x < 8\pi$ においては

$$4x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$
$$\therefore\ x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n}{2}\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

すべての解の和は

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) \times 4 + \left(0 + \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi\right) \times 2$$
$$= \frac{\pi}{2} \times 4 + 3\pi \times 2 = \boxed{8\pi}\ \text{(ア)}$$

(2) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと

$$\mathrm{PQ}^2 = (p-q)^2 + (p^2-q^2)^2 = 1$$
$$(p-q)^2\{1+(p+q)^2\} = 1$$
$$\therefore\ (p-q)^2 = \frac{1}{1+(p+q)^2}$$

この条件のもとで，線分 PQ と放物線 $y = x^2$ とで囲まれる部分の面積 S は

$$S = \left|\int_p^q \left(\frac{p^2-q^2}{p-q}(x-p) + p^2 - x^2\right) dx\right|$$
$$= \left|-\int_p^q (x-p)(x-q)\,dx\right|$$
$$= \left|\frac{1}{6}(q-p)^3\right|$$
$$= \frac{1}{6}|p-q|^3$$
$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{1+(p+q)^2}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

面積 S は，$(p+q)^2 = 0$ のとき

最大値 $\boxed{\dfrac{1}{6}}$ (イ)

をとる。

(3)　$ab = 127(a+b)$ より

$$(a-127)b = 127a \qquad \therefore\ b = \frac{127a}{a-127}$$

b は x の小数部分であるから

$$0 \leqq \frac{127a}{a-127} < 1$$

$$0 \leqq 127a(a-127) < (a-127)^2$$

$$\begin{cases} 127a(a-127) \geqq 0 \\ (126a+127)(a-127) < 0 \end{cases} \qquad \therefore\ -\frac{127}{126} < a \leqq 0$$

a は整数であるから

$$a = 0 \text{　または　} a = -1$$

$ab = 127(a+b)$ より

$$(a,\ b) = (0,\ 0),\ \left(-1,\ \frac{127}{128}\right)$$

$x = a + b \neq 0$ より

$$x = \boxed{-\frac{1}{128}}\ \text{(ウ)}$$

(4)　線分 OB を O を中心として yz 平面内を回転させると，B は $\mathrm{B'}(0,\ 0,\ -\sqrt{2}\,)$ に重ねることができる。x 軸上の任意の点 P に対して

$$\mathrm{PB} = \mathrm{PB'}$$

であり，A と B$'$ は同じ xz 平面上で x 軸に関して反対側にあるから，

P が線分 AB$'$ と x 軸の交点のとき $\mathrm{AP}+\mathrm{PB} = \mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$ は最小

となる。したがって，AP + PB の最小値は

$$\mathrm{AB'} = \sqrt{(1-0)^2 + (2+\sqrt{2}\,)^2} = \boxed{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}\ \text{(エ)}$$

(注)　A から x 軸におろした垂線の足を H とすると，AP + PB が最小のとき

$$\triangle \mathrm{OPB'} \backsim \triangle \mathrm{HPA'}$$

であるから，

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = \mathrm{OB'} : \mathrm{HA'} = \sqrt{2} : 2$$

$$\therefore\ \mathrm{OP} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\,\mathrm{OH} = \sqrt{2}-1,\quad \mathrm{P}\left(\sqrt{2}-1,\ 0,\ 0\right)$$

2

(1)
$$\begin{cases} y = ax + 2a^2 & \cdots\cdots ① \\ ay = x + a^2 + a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入して y を消去すると

$$a(ax + 2a^2) = x + a^2 + a$$
$$(a^2 - 1)x = -2a^3 + a^2 + a$$
$$\therefore\ (a + 1)(a - 1)x = -a(a - 1)(2a + 1)$$

$a = -1$ のとき x は存在しないから，2 直線は共有点を持たない。

$a = 1$ のとき，①と②は同一直線になる。

$a \neq \pm 1$ のとき

$$x = \frac{-2a^2 - a}{a + 1}$$
$$y = a \cdot \frac{-2a^2 - a}{a + 1} + 2a^2 = \frac{a(-2a^2 - a) + 2a^2(a + 1)}{a + 1} = \frac{a^2}{a + 1}$$

2 直線の共有点は

$$\begin{cases} a \neq \pm 1 \text{ のとき} & \left(\dfrac{-2a^2 - a}{a + 1},\ \dfrac{a^2}{a + 1}\right) \\ a = 1 \text{ のとき} & \text{直線 } y = x + 2 \text{ 上のすべての点} \\ a = -1 \text{ のとき} & \text{なし} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) $a = 1$ のとき

$$A \cap B = \{(-1,\ 1)\} \neq \phi$$

$a \neq \pm 1$ のとき，$A \cap B = \phi$ となるのは，(1)より

$$\begin{cases} -1 \leqq \dfrac{-2a^2 - a}{a + 1} \leqq 0 & \cdots\cdots ③ \\ 0 \leqq \dfrac{a^2}{a + 1} \leqq 1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

$a \neq 0$ のとき，④より $a + 1 > 0$ であり，$a = 0$ のときとあわせて

$$③ \iff 0 \leqq a^2 \leqq a + 1$$
$$\iff a^2 - a - 1 \leqq 0$$
$$\iff \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$④ \iff -(a + 1) \leqq -2a^2 - a \leqq 0$$
$$\iff \begin{cases} 2a^2 - 1 \leqq 0 \\ a(2a + 1) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a \leqq -\dfrac{1}{2} \text{ または } a \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq -\frac{1}{2} \text{ または } 0 \leqq a \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A \cap B \neq \phi$ となる a の値は,

$a = 1$ または“③かつ④”

より

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq -\frac{1}{2} \text{ または } 0 \leqq a \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ または } a = 1 \quad \text{(答)}$$

3

(1)　条件(i), (ii)を用いて

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{1+6+12}{8}=\frac{19}{8}\quad\text{(答)}$$

(2)　(1)と同様にして

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)-3\left(-\frac{4}{3}\right)^2-3\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$=f\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{16}{3}+\frac{12}{3}$$
$$=\left\{f\left(\frac{2}{3}\right)-3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}-\frac{4}{3}$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{3}+1-\frac{4}{3}=\frac{8-9+27-36}{27}=-\frac{10}{27}\quad\text{(答)}$$

(3)　条件(ii)より

$$f(x+1)=f(x)+3x^2+3x$$
$$f(-x)=f(-x-1)+3(-x-1)^2+3(-x-1)$$

であるから，差をとると

$$f(x+1)-f(-x)=f(x)-f(-x-1)+0$$
$$\therefore\ f(x+1)+f(-x-1)=f(x)+f(-x)\qquad\cdots\cdots\ ①$$

$0<x<1$ のとき $0<-x+1<1$ であり，(ii)より

$$f(-x)=f(-x+1)-3(-x)^2-3(-x)$$
$$=(-x+1)^3-3x^2+3x=-x^3+1$$

(i)とあわせて

$$0<x<1\text{ のとき }f(x)+f(-x)=x^3-x^3+1=1\qquad\cdots\cdots\ ②$$

$f(0)=0$ であるから，①，②より

$$f(x)+f(-x)=\begin{cases}1 & (x\text{ が整数でないとき})\\ 0 & (x\text{ が整数であるとき})\end{cases}\quad\text{(答)}$$

(注)　(ii)より

$$f(x+1)=f(x)+(x+1)^3-x^3-1$$
$$\therefore\ f(x+1)-(x+1)^3=f(x)-x^3-1$$

$0\leqq x<1$ のとき $f(x)-x^3=0$ であるから，$n\leqq x<n+1$ (n は整数) のとき

$$f(x)-x^3=-n$$
$$x^3-f(x)=n=[\,x\,]$$
$$\therefore\ f(x)=x^3-[\,x\,]$$