[**I**]

(1)　$(4<)\,\dfrac{14}{3}<x<5$ のとき，$[\,x\,]=4$ であるから

$$[\,\frac{3}{7}[\,x\,]\,]=[\,\frac{3}{7}\times 4\,]=[\,1+\frac{5}{7}\,]=1$$

また，

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{3}=2<\frac{3}{7}x<\frac{15}{7}=2+\frac{1}{7}$$

より

$$[\,\frac{3}{7}x\,]=2$$

であるから，求める値は

$$[\,\frac{3}{7}x\,]-[\,\frac{3}{7}[\,x\,]\,]=2-1=1 \quad \text{(答)}$$

(2)　[　]の定義より，実数 x に対して

$$[\,\frac{1}{2}x\,]\leqq\frac{1}{2}x<[\,\frac{1}{2}x\,]+1$$

$$\therefore\ \ 2[\,\frac{1}{2}x\,]\leqq x<2[\,\frac{1}{2}x\,]+2$$

であるから，

$$[\,x\,]=2[\,\frac{1}{2}x\,]\ \text{または}\ 2[\,\frac{1}{2}x\,]+1$$

$$\therefore\ \ \frac{1}{2}[\,x\,]=[\,\frac{1}{2}x\,]\ \text{または}\ [\,\frac{1}{2}x\,]+\frac{1}{2}$$

いずれの場合も $[\,\dfrac{1}{2}[\,x\,]\,]=[\,\dfrac{1}{2}x\,]$ であるから，

$$[\,\frac{1}{2}x\,]-[\,\frac{1}{2}[\,x\,]\,]=0$$

(おわり)

(3)　(2)と同様に考えて，正の整数 n，実数 x に対して

$$[\,\frac{1}{n}x\,]\leqq\frac{1}{n}x<[\,\frac{1}{n}x\,]+1$$

より

$$n[\,\frac{1}{n}x\,]\leqq x<n[\,\frac{1}{n}x\,]+n$$

$$\therefore\ \ [\,x\,]=n[\,\frac{1}{n}x\,]+k \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

k がいずれの値の場合も $0\leqq\dfrac{k}{n}<1$ であるから

$$[\,\frac{1}{n}[\,x\,]\,]=[\,\frac{1}{n}x\,] \qquad \therefore\ \ [\,\frac{1}{n}x\,]-[\,\frac{1}{n}[\,x\,]\,]=0 \quad \text{(答)}$$

［II］

(1)　$\det A = a^2+1>0$ より

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

が存在し，ℓ_2 上の任意の点 $(x,\ y)$ に対して A^{-1} で表される 1 次変換による像が $\ell_1 : y=1$ 上にあることが条件であるから，ℓ_2 の方程式は

$$\frac{1}{a^2+1}(x+ay)=1$$

$$\therefore\ \ x+ay-a^2-1=0 \quad (答) \qquad \cdots\cdots ①$$

ℓ_3 の A で表される 1 次変換による像が $\ell_1 : y=1$ であるから，ℓ_3 の方程式は

$$-x+ay=1 \quad (答) \qquad \cdots\cdots ②$$

(2)　①かつ $y=1$ より

$$\mathrm{P}(a^2-a+1,\ 1) \quad (答)$$

②かつ $y=1$ より

$$\mathrm{Q}(a-1,\ 1) \quad (答)$$

$a>0$ のもとで

$$①かつ② \iff \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} a^3 \\ a^2+2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\mathrm{R}\left(\frac{a^2}{2},\ \frac{a^2+2}{2a}\right) \quad (答)$$

(3)　P, Q がともに $y=1$ 上にあることに注意して

$$S(a) = \frac{1}{2}\left|x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{Q}}\right|\left|\frac{a^2+2}{2a}-1\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|a^2-a+1-(a-1)\right|\cdot\frac{|a^2-2a+2|}{2a}$$

$$= \frac{(a^2-2a+2)^2}{4a} \quad (答)$$

(4)　$S(a)$ を微分して

$$S'(a) = \frac{2(a^2-2a+2)(2a-2)\cdot a-(a^2-2a+2)^2\cdot 1}{4a^2}$$

$$= \frac{(a^2-2a+2)(3a^2-2a-2)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a-1)^2+1}{4a^2}\left\{3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{7}{3}\right\}$$

$$= \frac{(a-1)^2+1}{4a^2} \cdot 3\left(a - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

$a > 0$ において $S'(a)$ は $a - \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ と同符号であるから

a	(0)		$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		↘	極小	↗

よって，$S(a)$ は

$$a = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \quad \text{(答)}$$

のとき最小になる。

[**III**]

(1)　取り出された 4 枚のカードの中に 2 枚の 1 のカードが含まれる確率を求めて

$$P(A_1) = \frac{{}_{18}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_4} = \frac{18\cdot17\cdot4\cdot3}{20\cdot19\cdot18\cdot17} = \frac{3}{95} \quad (答)$$

(2)　取り出された 4 枚のカードが 1 と 2 である確率を求めて

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{{}_{20}\mathrm{C}_4} = \frac{1}{5\cdot19\cdot3\cdot17} = \frac{1}{4845} \quad (答)$$

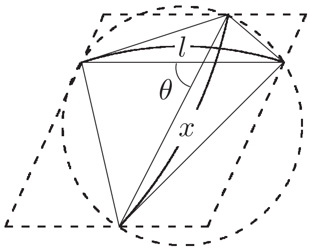
(3)　$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$ に注意すると

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\\
&= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)\\
&= \frac{3}{95}\times3-\frac{1}{4845}\times3\\
&= \frac{153-1}{1615}\\
&= \frac{8}{85} \quad (答)
\end{aligned}$$

(4)　A_i は 3 つ以上の共通部分は空集合となるから，(3)と同様に

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6)\\
&= \frac{3}{95}\times6-\frac{1}{4845}\times{}_6\mathrm{C}_2\\
&= \frac{306-5}{1615}\\
&= \frac{301}{1615} \quad (答)
\end{aligned}$$

[**IV**]



(1) もう 1 つの対角線の長さを x，2 つの対角線のなす角を θ とすると，四角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}lx\sin\theta$$

$x \leqq 2r$，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であり，長さ x の対角線が長さ l の対角線の垂直二等分線に重なる直径になるとき，どちらも等号が成り立つから，

最大値 lr　(答)

(2) (1)における長さ l の対角線は，半径 r の円の任意の弦にとれるから，l の最大値は $2r$ であり，

四角形の面積 lr の最大値は $2r^2$　(答)

(3) O から平面 ABCD におろした垂線の足を H とし，$\overline{\mathrm{OH}} = h$ とする。

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = 1$$

であるから，直角三角形 OAH，OBH，OCH，ODH において三平方の定理より

$$\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = \mathrm{CH} = \mathrm{DH} = \sqrt{1-h^2}$$

である。

h を固定すると，(2)より四角形 ABCD の面積 S の最大値は $2(1-h^2)$ となるから，四角錐 OABCD の体積 V の最大値を求めるだけであれば，

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}h(1-h^2) \quad (0 < h < 1)$$

としてよい。

$$\frac{dV}{dh} = \frac{2}{3}(1-3h^2)$$

は $h > 0$ において $\frac{1}{\sqrt{3}} - h$ と同符号であるから，

h	(0)		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		(1)
$\frac{dV}{dh}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，四角錐 OABCD の体積 V は

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき最大値 } \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{27} \quad \text{(答)}$$

をとる。

[**V**]　　$f(x) = e^{(p+1)x} - e^x = e^x(e^{px} - 1)$

(1)　$f'(x) = (p+1)e^{(p+1)x} - e^x = (p+1)e^x\left(e^{px} - \dfrac{1}{p+1}\right)$

ここで，

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff e^{px} > \frac{1}{p+1} \\ &\iff px > \log\frac{1}{p+1} \\ &\iff x > -\frac{1}{p}\log(p+1) \end{aligned}$$

であるから，

x	$(-\infty)$		$-\dfrac{1}{p}\log(p+1)$		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$(+\infty)$

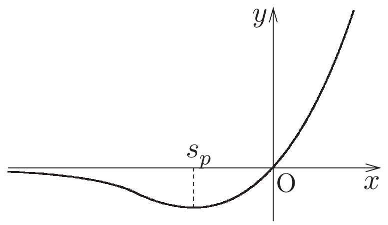
よって，$f(x)$ が最小となる x の値 s_p は

$$s_p = -\frac{1}{p}\log(p+1)　(答)$$

であり，

$$f(s_p) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p+1} - 1\right) = -p(p+1)^{-\frac{p+1}{p}}$$

であるから，$y = f(x)$ のグラフの概形は次図のようになる。



(答)

(2)　$g(t) = \displaystyle\int_t^{t+1} f(x)e^{t-x}\,dx$

$$= e^t\int_t^{t+1}(e^{px} - 1)\,dx$$

$$= e^t\left[\frac{1}{p}e^{px} - x\right]_t^{t+1} = e^t\left(\frac{e^{p(t+1)} - e^{pt}}{p} - 1\right) = \frac{e^p - 1}{p}e^{(p+1)t} - e^t$$

$$g'(t) = \frac{p+1}{p}(e^p - 1)e^{(p+1)t} - e^t$$

ここで，

$$g'(t) > 0 \iff \frac{p+1}{p}(e^p - 1)e^{pt} - 1 > 0$$

$$\iff e^{pt} > \frac{p}{(p+1)(e^p-1)}$$
$$\iff pt > \log\frac{p}{(p+1)(e^p-1)}$$
$$\iff t > \frac{1}{p}\log\frac{p}{(p+1)(e^p-1)}$$

であるから，

t	$(-\infty)$		$\frac{1}{p}\log\frac{p}{(p+1)(e^p-1)}$		$(+\infty)$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	(0)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$(+\infty)$

よって，$g(t)$ が最小となる t の値 t_p は

$$t_p = \frac{1}{p}\log\frac{p}{(p+1)(e^p-1)} \quad \text{(答)}$$

(3)
$$\begin{aligned} t_p - s_p &= \frac{1}{p}\log\frac{p}{(p+1)(e^p-1)} + \frac{1}{p}\log(p+1) \\ &= \frac{1}{p}\log\frac{p}{e^p-1} \\ &= -\frac{1}{p}\log\frac{e^p-1}{p} \end{aligned}$$

$0 < p \leqq 1$ のとき

$$1 + \frac{p}{2} \leqq \frac{e^p-1}{p} \leqq 1 + \frac{p}{2} + p^2$$

が成立することを用いて，(底) $= e > 1$，$-\dfrac{1}{p} < 0$ より

$$-\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right) \leqq t_p - s_p \leqq -\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2}\right)$$
$$\therefore\ -\log\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)^{\frac{1}{p}} \leqq t_p - s_p \leqq -\log\left(1+\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ より

$$\lim_{p\to+0}\left(1+\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to+0}\left\{\left(1+\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}\right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\lim_{p\to+0}\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to+0}\left\{\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)^{\frac{1}{\frac{p}{2}+p^2}}\right\}^{\frac{1}{2}+p} = e^{\frac{1}{2}}$$

であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{p\to+0}(t_p - s_p) = -\log e^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \quad \text{(答)}$$