[I]　実数 x に対して，x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{14}{3} < x < 5$ のとき，$\left[\dfrac{3}{7}x\right] - \left[\dfrac{3}{7}[x]\right]$ を求めよ。

(2) すべての実数 x について，$\left[\dfrac{1}{2}x\right] - \left[\dfrac{1}{2}[x]\right] = 0$ を示せ。

(3) n を正の整数とする。実数 x について，$\left[\dfrac{1}{n}x\right] - \left[\dfrac{1}{n}[x]\right]$ を求めよ。

[II]　$a > 0$ に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

で定める。xy 平面上の直線 $y = 1$ を ℓ_1 とする。ℓ_1 の各点を行列 A で表される1次変換で移してできる直線を ℓ_2 とし，ℓ_1 の各点を A の逆行列 A^{-1} で表される1次変換で移してできる直線を ℓ_3 とする。また，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を P，ℓ_1 と ℓ_3 の交点を Q，ℓ_2 と ℓ_3 の交点を R とし，$\triangle$PQR の面積を $S(a)$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　直線 ℓ_2 と直線 ℓ_3 の方程式を求めよ。

(2)　3 点 P, Q, R の座標を求めよ。

(3)　$S(a)$ を求めよ。

(4)　$S(a)$ を最小にする a を求めよ。

[III]　トランプのハートとスペードの 1 から 10 までのカードが 1 枚ずつ総計 20 枚ある。$i = 1, 2, \cdots\cdots, 10$ に対して，番号 i のハートとスペードのカードの組を第 i 対とよぶことにする。20 枚のカードの中から 4 枚のカードを無作為に取り出す。取り出された 4 枚のカードの中に第 i 対が含まれているという事象を A_i で表すとき, 以下の問に答えよ。

(1) 事象 A_1 が起こる確率 $P(A_1)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(A_1 \cap A_2)$ を求めよ。

(3) 確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ を求めよ。

(4) 取り出された 4 枚のカードの中に第 1 対, 第 2 対, 第 3 対, 第 4 対, 第 5 対, 第 6 対の中の少なくとも 1 つが含まれる確率を求めよ。

[IV]　以下の問に答えよ。

(1) 半径 r の円に内接し，1つの対角線の長さが l であるような四角形の面積の最大値を r と l で表せ。

(2) 半径 r の円に内接する四角形の面積の最大値を求めよ。

(3) 空間内の点 O を頂点とし，四角形 ABCD を底面とする四角錐（すい）が $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = 1$ を満たしているとする。そのような四角錐の体積の最大値を求めよ。

[V]　実数 $p > 0$ に対して，

$$f(x) = e^{(p+1)x} - e^{x}$$

とおく。以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ が最小となる x の値 s_p を求め，$y = f(x)$ のグラフを描け。

(2)

$$g(t) = \int_t^{t+1} f(x)\, e^{t-x} dx$$

とおく。$g(t)$ が最小となる t の値 t_p を求めよ。

(3) $0 < p \leqq 1$ のとき，

$$1 + \frac{p}{2} \leqq \frac{e^p - 1}{p} \leqq 1 + \frac{p}{2} + p^2$$

が成立することを用いて，右側からの極限 $\lim\limits_{p \to +0} (t_p - s_p)$ を求めよ。

[以　下　余　白]