

ディオファントス方程式 $x^3 + y^3 = 2z^3$ について

大塚美紀生

本稿では、次の4つの定理を初等的に証明する。

定理 1 自然数 x, y, z が

$$3x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たすならば、 $x^2 = y^2 = z$ である。

定理 2 整数 x, y, z が

$$x^6 + y^3 = z^2 \quad (2)$$

を満たすならば、 $xyz = 0$ または $y = 2x^2, z = \pm 3x^3$ である。

系 $x^6 + y^6 = z^2$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。^{注1}

定理 3 整数 x, y, z が

$$x^3 + y^3 = 2z^3 \quad (3)$$

を満たすならば、 $z = 0$ または $x = y = z$ である。

定理 4 曲線 $y^2 = x^3 + 1$ の有理点は $(-1, 0), (0, \pm 1), (2, \pm 3)$ だけである。

系 有理数 x, y, z が

$$x^6 + y^3 = z^2$$

を満たすならば、 $xyz = 0$ または $y = 2x^2, z = \pm 3x^3$ である。

これらの定理は、既に先人達によって証明されているが、ピタゴラス数^{注2}を導くと同じ手法で容易に証明できることに気づいたので、紹介しようと思った次第である。その証明法とて、筆者が知らないだけで、既にどこかで紹介されているかもしれない。この証明の流れでは、定理3と定理4は定理2の系として導かれる。

定理1の証明

$d = \gcd(x, y) > 1$ のときは、(1)より $d^4 | z^2$ であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1 \quad (x_1, y_1, z_1 \text{ は正の整数})$$

と表すことができ、

$$(1) \iff 3x_1^4 - 3x_1y_1 + y_1^4 = z_1^2$$

$$x^2 = y^2 = z \iff x_1^2 = y_1^2 = z_1$$

であるから、はじめから

x と y は互いに素である

と仮定して証明すれば十分である。このとき， y と z も互いに素である。

x と y の少なくとも一方は奇数であるから，(1)より

z は奇数

である。ここで， y が偶数であるとすれば，(1)より $z^2 - 3x^4$ は 2^2 で割り切れるが， $x^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{4}$ となるから成り立たない。よって，

y は奇数

である。

(1)を変形すると^{注3}

$$12x^4 - 12x^2y^2 + 4y^4 = 4z^2$$

$$3(2x^2 - y^2)^2 + y^4 = (2z)^2$$

$$3(2x^2 - y^2)^2 = (2z + y^2)(2z - y^2) \tag{4}$$

$2z + y^2$ ， y^2 がともに奇数であることに注意すると，

$$\begin{aligned} \gcd(2z + y^2, 2z - y^2) &= \gcd(2z + y^2, (2z + y^2) - 2y^2) \\ &= \gcd(2z + y^2, 2y^2) \\ &= \gcd(2z + y^2, y^2) \\ &= \gcd(2z, y^2) \\ &= \gcd(z, y^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり， $2z + y^2 > 0$ および

$$2z + y^2 \equiv 3 \pmod{4}, \quad 2z - y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

であることに注意すると，(4)より

$$2z + y^2 = 3a^2, \quad 2z - y^2 = b^2, \quad 2x^2 - y^2 = ab \tag{5}$$

を満たす互いに素な奇数 a ， b が存在する。ただし， $a > 0$ であり， b の符号は $2x^2 - y^2$ にあわせるものとする。(5)から z を消去して書き直すと

$$2y^2 = 3a^2 - b^2 \tag{6}$$

$$4x^2 = 2y^2 + 2ab = (a + b)(3a - b) \tag{7}$$

a ， b はともに奇数であり， $\gcd(a + b, a) = \gcd(b, a) = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} \gcd(a + b, 3a - b) &= \gcd(a + b, 4a - (a + b)) \\ &= \gcd(a + b, 4a) \\ &= \gcd(a + b, 4) \\ &= 2 \text{ または } 4 \end{aligned}$$

[I] $\gcd(a + b, 3a - b) = 2$ のとき

$a > 0$ より $a + b > 0$ または $3a - b > 0$ であるから，(7)より

$$a + b = 2c^2, \quad 3a - b = 2d^2, \quad x = cd$$

を満たす互いに素な正の整数 c ， d が存在して，

$$a = \frac{c^2 + d^2}{2}, \quad b = \frac{3c^2 - d^2}{2}, \quad x = cd \tag{8}$$

ここで, a, b は整数であるから, c と d はともに奇数である。(6)に代入して

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{3(c^2 + d^2)^2 - (3c^2 - d^2)^2}{8} \\ &= \frac{d^4 + 6c^2d^2 - 3c^4}{4} = \left(\frac{d^2 + 3c^2}{2}\right)^2 - 3c^4 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\therefore 3c^4 = \left(\frac{d^2 + 3c^2}{2} + y\right)\left(\frac{d^2 + 3c^2}{2} - y\right) \quad (10)$$

$\frac{d^2 + 3c^2}{2} + y$ と $\frac{d^2 + 3c^2}{2} - y$ が共通の素因数 p をもつとすれば, (10)より

$$p \mid d^2 + 3c^2, \quad p^2 \mid 3c^4$$

となり, p は c と d の共通の素因数となって矛盾するから,

$$\frac{d^2 + 3c^2}{2} + y \text{ と } \frac{d^2 + 3c^2}{2} - y \text{ は互いに素}$$

である。よって, (10)より

$$\left(\frac{d^2 + 3c^2}{2} + y, \frac{d^2 + 3c^2}{2} - y\right) = (3k^4, l^4) \text{ または } (l^4, 3k^4)$$

を満たす互いに素な正の奇数 k, l が存在する。いずれの場合も

$$c = kl, \quad d^2 + 3c^2 = 3k^4 + l^4 \quad (11)$$

であり, c を消去すると

$$d^2 = 3k^4 - 3k^2l^2 + l^4 \quad (12)$$

が得られる。

$x \neq y$ とすれば, $x \geq 1$ より, (1) および $x \neq y$ を満たす最小の x が存在する。その x に対して (8), (11)より

$$x = cd = kld \geq k$$

(i) $x = k$ のとき, $l = d = 1$ であり, (12), (11)より

$$x = k = 1, \quad c = kl = 1$$

(9)より $y = 1$ すなわち

$$x = y = 1$$

となって $x \neq y$ に反する。

(ii) $x > k$ のとき, x の最小性および (12)より

$$k = l$$

このとき, (11), (12)より $c = d = k^2$ であるから, (8), (9)より

$$x = y = k^4$$

となって $x \neq y$ に反する。

結局 $x = y$ が成り立ち, (1)より $x^2 = y^2 = z$ である。

[II] $\gcd(a+b, 3a-b) = 4$ のとき

(7)より

$$a+b = 4c^2, \quad 3a-b = 4d^2, \quad x = 2cd$$

を満たす互いに素な正の整数 c, d が存在する。書き直すと

$$a = c^2 + d^2, \quad b = 3c^2 - d^2, \quad x = 2cd \quad (13)$$

a, b は奇数であるから, c, d の偶奇は異なる。(6), (13)より

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{3(c^2 + d^2)^2 - (3c^2 - d^2)^2}{2} \\ &= d^4 + 6c^2d^2 - 3c^4 \\ &= (d^2 + 3c^2)^2 - 12c^4 \end{aligned} \quad (14)$$

$d^2 + 3c^2, y$ はともに奇数であることを考えて

$$3c^4 = \frac{d^2 + 3c^2 + y}{2} \cdot \frac{d^2 + 3c^2 - y}{2} \quad (15)$$

$\frac{d^2 + 3c^2 + y}{2}$ と $\frac{d^2 + 3c^2 - y}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$p \mid d^2 + 3c^2, \quad p^2 \mid 3c^4$$

となり, p は c と d の共通の素因数となるから矛盾する。よって,

$$\frac{d^2 + 3c^2 + y}{2} \quad \text{と} \quad \frac{d^2 + 3c^2 - y}{2} \quad \text{は互いに素}$$

であるから, (15)より

$$\left(\frac{d^2 + 3c^2 + y}{2}, \frac{d^2 + 3c^2 - y}{2} \right) = (3k^4, l^4) \quad \text{または} \quad (l^4, 3k^4)$$

を満たす互いに素な正の整数 k, l が存在する。いずれの場合も

$$c = kl, \quad d^2 + 3c^2 = 3k^4 + l^4 \quad (16)$$

であり, c を消去すると

$$d^2 = 3k^4 - 3k^2l^2 + l^4 \quad (17)$$

が得られる。

$x \neq y$ とすれば, $x \geq 1$ より, (1) および $x \neq y$ を満たす最小の x が存在する。その x に対して (13), (16)より

$$x = 2cd > c = kl \geq k$$

であるから, x の最小性および (17)より

$$k = l$$

このとき, (16), (17)より $c = d = k^2$ であるから, (13), (14)より

$$x = y = 2k^4$$

となって $x \neq y$ に反する。

以上により, 定理 1 は証明された。

定理 2 の証明

整数 x, y, z が $x > 0, z > 0$ および

$$x^6 + y^3 = z^2 \quad (2)$$

を満たすと仮定して, $y = 0$ または $y = 2z^2, z = 3x^3$ を導けばよい。

x と y が共通な素因数 p をもつとすれば, (2)の左辺は p^3 で割り切れるから,

$$x = px_1, y = py_1, z = p^2z_1 \quad (x_1, y_1, z_1 \text{ は整数})$$

と表されて, (2)は

$$p^3x_1^6 + y_1^3 = pz_1^2$$

となる。よって, y_1 は p で割り切れ, このとき pz_1^2 は p^3 で割り切れるから,

$$x_1^6 + y_2^3 = z_2^2 \quad (y_1 = py_2, z_1 = pz_2)$$

が得られるので, はじめから

$$x \text{ と } y \text{ は互いに素である}$$

と仮定して証明すれば十分である。特に, x と y の少なくとも一方は奇数である。

[I] x, y の一方が偶数で他方が奇数であるとき

$$x^2 + y = a, x^2 - y = b \text{ とおくと}$$

$$x^2 = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2} \quad (a, b \text{ は奇数}) \quad (18)$$

(2)に代入して

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 &= z^2 \\ a(a^2 + 3b^2) &= (2z)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

a, b が共通の素因数 p をもつとすれば, $p \neq 2$ であり, (18)より p は x, y の公約数となって x と y が互いに素であることに反する。よって, a と b は互いに素であるから,

$$\begin{aligned} \gcd(a, a^2 + 3b^2) &= \gcd(a, 3b^2) \\ &= \gcd(a, 3) \\ &= 1 \text{ または } 3 \end{aligned}$$

となって, さらに二つの場合に分けて考えることになる。

IA $\gcd(a, a^2 + 3b^2) = 1$ のとき

z は正の奇数であるから, (19)より

$$a = c^2, a^2 + 3b^2 = 4d^2, z = cd \quad (20)$$

を満たす互いに素な正の奇数 c, d が存在する。(18)より

$$y = a - \frac{a+b}{2} = c^2 - x^2 \quad (21)$$

$$x^6 + y^3 = x^6 + (c^2 - x^2)^3 = c^2(3x^4 - 3c^2x^2 + c^4)$$

と表されるから, (2), (20)より

$$3x^4 - 3c^2x^2 + c^4 = d^2$$

であり, 定理 1 より ($x > 0$ のもとで) $x = c$ となるから, (21)とあわせて

$$y = 0$$

IB $\gcd(a, a^2 + 3b^2) = 3$ のとき

IA と同様に考えて, (19)より

$$a = 3c^2, \quad a^2 + 3b^2 = 3(2d)^2, \quad z = 3cd \quad (22)$$

を満たす互いに素な正の奇数 c, d が存在することがわかる。(18)より

$$y = a - \frac{a+b}{2} = 3c^2 - x^2 \quad (23)$$

$$x^6 + y^3 = x^6 + (3c^2 - x^2)^3 = 9c^2(3c^4 - 3c^2x^2 + x^4)$$

と表されるから, (2), (22)より

$$3c^4 - 3c^2x^2 + x^4 = d^2$$

定理 1 より ($x > 0$ のもとで)

$$x = c, \quad d = c^2$$

(23), (22)より y, z を求めると

$$y = 2c^2 = 2x^2, \quad z = 3c^3 = 3x^3$$

[II] x, y がともに奇数であるとき

$$x^2 + y = 2a, \quad x^2 - y = 2b \text{ とおくと}$$

$$x^2 = a + b, \quad y = a - b \quad (24)$$

ここで, a, b の偶奇が異なることに注意する。(24)を(2)に代入して

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = z^2$$

$$2a(a^2 + 3b^2) = z^2 \quad (25)$$

a, b が共通の素因数 p をもつとすれば, (24)より p は x, y の公約数となって x と y が互いに素であることに反するから, a と b は互いに素である。 $a^2 + 3b^2$ が奇数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \gcd(2a, a^2 + 3b^2) &= \gcd(a, a^2 + 3b^2) \\ &= \gcd(a, 3b^2) \\ &= \gcd(a, 3) \\ &= 1 \text{ または } 3 \end{aligned}$$

であるから, さらに二つの場合に分けて考えることになる。

IIA $\gcd(2a, a^2 + 3b^2) = 1$ のとき

仮定および (25)より, z は正の偶数であり, $a^2 + 3b^2$ は奇数であるから

$$2a = (2c)^2, \quad a^2 + 3b^2 = d^2, \quad z = 2cd \quad (26)$$

満たす互いに素な正の整数 c, d が存在する。(24)より

$$y = 2a - (a+b) = 4c^2 - x^2 \quad (27)$$

$$x^6 + y^3 = x^6 + (4c^2 - x^2)^3 = 4c^2(3x^4 - 12c^2x^2 + 16c^4)$$

と表されるから, (2), (26)より

$$3x^4 - 3(2c)^2x^2 + (2c)^4 = d^2$$

定理 1 より ($x > 0$ のもとで) $x = 2c$ となり, (27)とあわせて

$$y = 0$$

II B $\gcd(2a, a^2 + 3b^2) = 3$ のとき

II A と同様に考えて, (25)より

$$2a = 3(2c)^2, \quad a^2 + 3b^2 = 3d^2, \quad z = 6cd \quad (28)$$

を満たす互いに素な正の整数 c, d が存在することがわかる。(24)より

$$y = 2a - (a + b) = 12c^2 - x^2 \quad (29)$$

$$x^6 + y^3 = x^6 + (12c^2 - x^2)^3 = 9(2c)^2 \{3(2c)^4 - 3(2c)^2x^2 + x^4\}$$

と表されるから, (2), (28)より

$$3(2c)^4 - 3(2c)^2x^2 + x^4 = d^2$$

定理 1 より ($x > 0$ のもとで)

$$2c = x, \quad d = x^2$$

となり, (29), (28)より

$$y = 3(2c)^2 - x^2 = 2x^2, \quad z = 3(2c)d = 3x^3$$

以上により, 定理 2 は証明された。

定理 3 の証明

恒等式

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right)^2 - x^3 y^3 = \left(\frac{x^3 - y^3}{2}\right)^2$$

が成り立つから, (3)より

$$z^6 + (-xy)^3 = \left(\frac{x^3 - y^3}{2}\right)^2$$

定理 2 より

$$z = 0 \text{ または } xy = 0 \text{ または } x^3 - y^3 = 0 \quad (30)$$

または

$$-xy = 2z^2, \quad \frac{x^3 - y^3}{2} = \pm 3z^3 \quad (31)$$

$x = 0$ のときは, (3)より $y^3 = 2z^3$ となるが, 2 は立方数ではないから $y = z = 0$ となる。 $y = 0$ のときも同様に $x = z = 0$ となる。

したがって, (30)の場合は

$$z = 0 \text{ または } x = y = z$$

(31)の場合は, z を消去すると

$$\left(\frac{x^3 - y^3}{2}\right)^2 = 9\left(\frac{-xy}{2}\right)^3$$

$$2x^6 + 5x^3 y^3 + 2y^6 = 0$$

$$(2x^3 + y^3)(x^3 + 2y^3) = 0$$

$$\therefore 2x^3 + y^3 = 0 \text{ または } x^3 + 2y^3 = 0$$

2 は立方数ではないから, いずれの場合も $x = y = 0$ となり, (3)より $z = 0$ となる。

以上により, 定理 3 が証明された。

定理 4 の証明

$$y^2 = x^3 + 1 \quad (32)$$

を満たす有理数 x, y に対して

$$x = \frac{u}{m}, \quad y = \frac{v}{n}, \quad \gcd(u, m) = \gcd(v, n) = 1 \quad (33)$$

となる自然数 m, n および整数 u, v を定めると, (32) を満たすから

$$\frac{v^2}{n^2} = \frac{u^3}{m^3} + 1 \quad (34)$$

$m^3 v^2 = n^2(u^3 + m^3)$ と見れば,

$$n^2 \mid m^3 v^2, \quad \gcd(n, v) = 1 \quad \text{より} \quad n^2 \mid m^3$$

$m^3(v^2 - n^2) = n^2 u^3$ と見れば,

$$m^3 \mid n^2 u^3, \quad \gcd(m, u) = 1 \quad \text{より} \quad m^3 \mid n^2$$

m, n はともに正の整数であるから $m^3 = n^2$ となって

$$m = k^2, \quad n = k^3 \quad (35)$$

を満たす正の整数 k が存在し, (34) は

$$u^3 = v^2 - n^2 = (v + n)(v - n) \quad (36)$$

と同値となる。 $\gcd(v + n, n) = \gcd(v, n) = 1$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \gcd(v + n, v - n) &= \gcd(v + n, v + n - 2n) \\ &= \gcd(v + n, 2n) \\ &= \gcd(v + n, 2) \\ &= 1 \quad \text{または} \quad 2 \end{aligned}$$

[I] $\gcd(v + n, v - n) = 1$ のとき

(36)より

$$v + n = a^3, \quad v - n = b^3, \quad \gcd(a, b) = 1 \quad (37)$$

を満たす整数 a, b が存在する。 v を消去すると, (35)より

$$a^3 + (-b)^3 = 2n = 2k^3 > 0$$

となるから, 定理 3 および (37), (35)より

$$a = -b = k, \quad v = a^3 - n = a^3 - k^3 = 0$$

(33)より $y = 0$ となり, (32)とあわせて

$$(x, y) = (-1, 0)$$

[II] $\gcd(v + n, v - n) = 2$ のとき

(36)より

$$v + n = 4c^3, \quad v - n = 2d^3, \quad \gcd(c, d) = 1 \quad (38)$$

または

$$v + n = 2d^3, \quad v - n = 4c^3, \quad \gcd(c, d) = 1 \quad (39)$$

を満たす整数 c, d が存在する。

IIA (38)の場合

v を消去して (35) を用いると

$$4c^3 - 2d^3 = 2n = 2k^3 \quad \therefore d^3 + k^3 = 2c^3$$

定理 3 より

$$c = 0 \text{ または } c = d = k$$

$c = 0$ のとき, (38), (36) より

$$u = 0$$

(33) より $x = 0$ となり, (32) とあわせて

$$(x, y) = (0, \pm 1)$$

$c = d = k$ のとき, (38), (35), (36) より

$$v = 3k^3 = 3n, \quad u^3 = v^2 - n^2 = 9k^6 - k^6 = 8k^6 = 8m^3$$

(33) より

$$(x, y) = (2, 3)$$

IIB (39)の場合

v を消去して (35) を用いると

$$2d^3 - 4c^3 = 2n = 2k^3 \quad \therefore d^3 + (-k)^3 = 2c^3$$

定理 3 より

$$c = 0 \text{ または } c = d = -k$$

$c = 0$ のとき, (39), (36) より

$$u = 0$$

(33) より $x = 0$ となり, (32) とあわせて

$$(x, y) = (0, \pm 1)$$

$c = d = -k$ のとき, (39), (35), (36) より

$$v = -3k^3 = -3n, \quad u^3 = v^2 - n^2 = 9k^6 - k^6 = 8k^6 = 8m^3$$

(33) より

$$(x, y) = (2, -3)$$

以上により, 曲線 $y^2 = x^3 + 1$ の有理点は $(-1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(2, \pm 3)$ だけであり, 定理 4 が証明された。

注1 ピタゴラス方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ を高次拡張する形で，フェルマー方程式

$$x^n + y^n = z^n \quad (n \text{ は } 3 \text{ 以上の整数})$$

が考えられたが，

$$x^{2n} + y^{2n} = z^2 \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

の方向に拡張された問題もある。

注2 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす自然数の組 (x, y, z) をピタゴラス数(Pythagorean triple) という。日本語では「数」と訳されるが，個別の数を指すのではなく，3つの数の組を指す言葉である。 x, y, z が互いに素であるときは，偶奇の異なる互いに素な自然数 m, n を用いて

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

と表される(→[1])。この結果を導くテクニックを本稿では駆使しているが，結果そのものは用いないので，これ以上の深追いはしないことにする。

注3 この変形を可能にしているのは $2^2 - 3 = 1$ という偶然に支えられているので，本稿の手法をそのまま高次に拡張するのは不可能だと思われる。

参考文献

- [1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生，ディオファントス方程式 $2^n x^2 + y^4 = z^4$ ，
早稲田数学フォーラム (2008)
<http://homepage2.nifty.com/wasmath/fermat-sierpinski.pdf>
- [3] 大塚美紀生，オイラーと $x^3 + y^3 = 2z^3$ ，早稲田数学フォーラム (2009)
<http://homepage2.nifty.com/wasmath/euler1770.pdf>