〔 **I** 〕

(1)　$x = 2 - i$ を解とする2次方程式を一つ求めると

$$(x-2)^2 = (-i)^2 \qquad \therefore\ x^2 - 4x + 5 = 0$$

仮定より

$$\begin{aligned} &x^3 + ax^2 - 3x + 10 \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x + a + 4) + (4a + 8)x - 5a - 10 \qquad \cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

に $x = 2 - i$ を代入すると0になるから

$$(4a + 8)(2 - i) - 5a - 10 = 0$$

$4a + 8$ および $-5a - 10$ は実数で，$2 - i$ は虚数であるから

$$4a + 8 = 0 \text{ かつ } -5a - 10 = 0 \qquad \therefore\ a = \underset{(1)(2)}{\boxed{-2}}$$

このとき，$(*)$より

$$x^3 + ax^2 - 3x + 10 = (x^2 - 4x + 5)(x + 2)$$

であるから，3次方程式 $x^3 + ax^2 - 3x + 10 = 0$ の実数解は $\underset{(3)(4)}{\boxed{-2}}$ である。

(2)　加法定理を用いて合成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\sin x + 3\cos x \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より

$$\frac{\pi}{3} \leqq x + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$$

であるから，$f(x)$ のとりうる値の範囲は

$$2\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\pi \leqq f(x) \leqq 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \underset{(5)(6)}{\boxed{-3}} \leqq f(x) \leqq \underset{(7)}{\boxed{2}}\sqrt{\underset{(8)}{\boxed{3}}}$$

$f(x)^2 = (\sqrt{3}\sin x + 3\cos x)^2 = 3\sin^2 x + 6\sqrt{3}\sin x\cos x + 9\cos^2 x$ であるから

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) = \{f(x) - 1\}^2 - 1$$

$-3 \leqq f(x) \leqq 2\sqrt{3}$ を考えて，

$$f(x) = -3 \text{ のとき最大値 } 15,\quad f(x) = 1 \text{ のとき最小値 } -1$$

であり，$g(x)$ のとりうる値の範囲は

$$\underset{(9)(10)}{\boxed{-1}} \leqq g(x) \leqq \underset{(11)(12)}{\boxed{15}}$$

(3) 辺 AB の長さは一定であるから，△ABP の面積の最大最小は，点 P から直線 AB におろした垂線の長さ(高さ)で決まる。

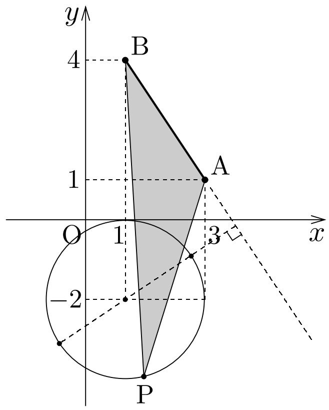
直線 AB の方程式は

$$y-1=\frac{1-4}{3-1}(x-3)$$

$$\therefore\ \ 3x+2y-11=0$$

円の中心 $(1,\ -2)$ と直線 AB の距離を d とすると，点の直線の距離公式より

$$d=\frac{|3\times 1+2\times(-2)-11|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$$



であるから，点 P から直線 AB におろした垂線の足を H とすると

$$\overline{\mathrm{PH}}\text{ の最小値は } d-2=\frac{2(6-\sqrt{13}\,)}{\sqrt{13}},\ \ \text{最大値は } d+2=\frac{2(6+\sqrt{13}\,)}{\sqrt{13}}$$

である。

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{13}$$

であるから，△ABP の面積 $\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$ の

$$\text{最小値は } \underset{(13)}{\boxed{6}}-\sqrt{\underset{(14)(15)}{\boxed{13}}},\ \ \text{最大値は } \underset{(16)}{\boxed{6}}+\sqrt{\underset{(17)(18)}{\boxed{13}}}$$

(別解) 点 P は円 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 上にあることより

$$\mathrm{P}(1+2\cos\theta,\ -2+2\sin\theta)$$

とおくことができて，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(2-2\cos\theta,\ 3-2\sin\theta),\ \ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-2\cos\theta,\ 6-2\sin\theta)$$

面積公式より，△ABP の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\Big|(2-2\cos\theta)(6-2\sin\theta)-(3-2\sin\theta)(-2\cos\theta)\Big|\\&=\frac{1}{2}\Big|12-4\sin\theta-6\cos\theta\Big|\\&=\Big|6-(2\sin\theta+3\cos\theta)\Big|\end{aligned}$$

ここで，加法定理を用いると

$$\begin{aligned}2\sin\theta+3\cos\theta&=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin\theta+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{13}\,(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=\sqrt{13}\,\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

$$\left(\alpha\text{ は } \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}\text{ を満たす定数}\right)$$

と変形され，$\theta+\alpha$ はすべての実数値をとり得るから，

$$\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)\ の最小値は\ -\sqrt{13},\quad 最大値は\ \sqrt{13}$$

となる。

よって，$S = \left|6 - (2\sin\theta + 3\cos\theta)\right|$ の

$$最小値は\ \underset{(13)}{\boxed{6}} - \sqrt{\underset{(14)(15)}{\boxed{13}}},\quad 最大値は\ \underset{(16)}{\boxed{6}} + \sqrt{\underset{(17)(18)}{\boxed{13}}}$$

(4) $\theta = 18^\circ$ とおくと，

$$3\theta = 90^\circ - 2\theta$$

であるから，余角の公式より

$$\sin 3\theta = \sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

3 倍角の公式，2 倍角の公式を用いて

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$$

$0 < \sin 18^\circ < 1$ であるから

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{\overset{(19)}{\boxed{5}}} - \overset{(20)}{\boxed{1}}}{\underset{(21)}{\boxed{4}}}$$

また，公式 $\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1$ および $\cos 18^\circ > 0$ より

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{16 - (\sqrt{5} - 1)^2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{\overset{(22)(23)}{\boxed{10}} + \overset{(24)}{\boxed{2}}\sqrt{\overset{(25)}{\boxed{5}}}}}{\underset{(26)}{\boxed{4}}}$$

（注） 方程式①は実質的に

$$\sin 5\theta = \sin 90^\circ$$

であり，$\theta = 90^\circ$ を解に持つから，②の左辺は $\sin\theta$ の多項式として $\sin\theta - 1$ を因数にもつことがわかる。また，①の代わりに

$$\cos 3\theta = \cos(90^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta$$

としてもよい。

(5)　12^{60} が (10 進表示で) n 桁の整数であるとすれば

$$10^{n-1} \leqq 12^{60} < 10^{n}$$

であり，常用対数をとると

$$n-1 \leqq \log_{10} 12^{60} < n$$

ここで，

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{60} &= 60\log_{10}(2^2 \times 3)\\ &= 60(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 60 \times (2 \times 0.3010 + 0.4771)\\ &= 64.7460\end{aligned}$$

であるから $n = 65$ であり，

$$12^{60} \text{ は } \underset{(27)(28)}{\boxed{65}} \text{ 桁の整数}$$

である。

12^{60} の最高位の数字を a とすると

$$a \cdot 10^{64} \leqq 12^{60} < (a+1) \cdot 10^{64}$$

であり，常用対数をとると

$$\log_{10} a + 64 \leqq \log_{10} 12^{60} < \log_{10}(a+1) + 64$$

$$\therefore\ \log_{10} a \leqq 0.7460 < \log_{10}(a+1)$$

ここで，

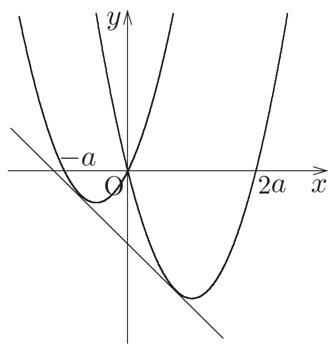
$$\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$$

であるから，12^{60} の最高位の数字 a は

$$a = \underset{(29)}{\boxed{5}}$$

〔**II**〕



(1) $x=t$ における $y=x^2+ax$ の接線の方程式は

$$y=(2t+a)(x-t)+t^2+at$$

$$\therefore\ y=(2t+a)x-t^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$x=u$ における $y=x^2-2ax$ の接線の方程式は

$$y=(2u-2a)(x-u)+u^2-2au$$

$$\therefore\ y=(2u-2a)x-u^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①と②が同一直線となるための条件を求めて，

$$\begin{cases} 2t+a=2u-2a & \cdots\cdots ③ \\ -t^2=-u^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③より

$$u=t+\frac{3}{2}a$$

④より

$$t^2=\left(t+\frac{3}{2}a\right)^2$$

$$3at+\frac{9}{4}a^2=0 \qquad \therefore\ t=-\frac{3}{4}a,\ u=\frac{3}{4}a$$

①, ②より ℓ の方程式は

$$y=\frac{\overset{(30)(31)}{\boxed{-1}}}{\underset{(32)}{\boxed{2}}}ax-\frac{\overset{(33)}{\boxed{9}}}{\underset{(34)(35)}{\boxed{16}}}a^2$$

(2) 2つの放物線と接線 ℓ で囲まれる図形の面積 S は

$$S=\int_{-\frac{3}{4}a}^{0}\left\{x^2+ax-\left(-\frac{a}{2}x-\frac{9}{16}a^2\right)\right\}dx$$

$$+\int_{0}^{\frac{3}{4}a}\left\{x^2-2ax-\left(-\frac{a}{2}x-\frac{9}{16}a^2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}a}^{0}\left(x+\frac{3}{4}a\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{3}{4}a}\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{4}a\right)^3\right]_{-\frac{3}{4}a}^{0}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{4}a\right)^3\right]_{0}^{\frac{3}{4}a}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}a\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}a\right)^3$$

$$=\frac{\overset{(36)}{\boxed{9}}}{\underset{(37)(38)}{\boxed{32}}}a^{\overset{(39)}{\boxed{3}}}$$

〔III〕

(1) $n=12$ のとき，$x_1<x_2$ となる $(x_1,\ x_2)$ の組は ${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{12^2}=\frac{\overset{(40)(41)}{\boxed{11}}}{\underset{(42)(43)}{\boxed{24}}}$$

(2) $x_1<x_2<x_3$ の場合と $x_1<x_2=x_3$ の場合に分けて考えると，$x_1<x_2\leqq x_3$ となる $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ の組の数は

$${}_{12}\mathrm{C}_3+{}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=220+66=286$$

よって，$n=12$ のとき $x_1<x_2\leqq x_3$ となる確率は

$$\frac{286}{12^3}=\frac{\overset{(44)(45)(46)}{\boxed{143}}}{\underset{(47)(48)(49)}{\boxed{864}}}$$

(3) x_4 が x_1 と x_2 のいずれとも異なる場合と x_1 と x_2 のいずれかと一致する場合に分けて考えることにより，$x_1<x_2<x_3$ かつ $x_3>x_4$ となる $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の組数 $f(n)$ は

$$\begin{aligned}f(n)&={}_n\mathrm{C}_4\times 3+{}_n\mathrm{C}_3\times 2\\&=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\\&=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)\{3(n-3)+8\}\\&=\frac{1}{24}(n^3-3n^2+2n)(3n-1)\\&=\frac{1}{24}(3n^4-10n^3+9n^2-2n)\\&=\frac{\overset{(50)}{\boxed{1}}}{\underset{(51)}{\boxed{8}}}n^4-\frac{\overset{(51)}{\boxed{5}}}{\underset{(53)(54)}{\boxed{12}}}n^3+\frac{\overset{(55)}{\boxed{3}}}{\underset{(56)}{\boxed{8}}}n^2-\frac{\overset{(57)}{\boxed{1}}}{\underset{(58)(59)}{\boxed{12}}}n\end{aligned}$$

(注) (2), (3)は数列的手法を用いてまとめてもよい。

(2) $x_2=k\ (1\leqq k\leqq 12)$ に対して

$1\leqq x_1\leqq k-1$ となる x_1 は $k-1$ 通り，

$k\leqq x_3\leqq 12$ となる x_3 は $13-k$ 通り

であるから，$x_1<x_2\leqq x_3\leqq 12$ となる $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ の組の数は

$$\sum_{k=1}^{12}(k-1)(13-k)=-\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=1}^{12}(14k-13)$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 25 + \frac{12}{2}\times(1+155)$$
$$= -650 + 936 = 286$$

よって，$n=12$ のとき $x_1 < x_2 \leqq x_3$ となる確率は

$$\frac{286}{12^3} = \frac{\overset{(44)(45)(46)}{\boxed{143}}}{\underset{(47)(48)(49)}{\boxed{864}}}$$

(3) $x_3 = k\,(\geqq 3)$ に対して

$x_1 < x_2 < k$ となる $(x_1,\ x_2)$ の組は ${}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ 通り，

$k > x_4$ となる x_4 は $k-1$ 通り

であるから，$x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_3 > x_4$ となる $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の組数 $f(n)$ は

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2}(k-1)(k-2)\cdot(k-1)\\
&= \sum_{k=3}^{n}\left\{\frac{1}{2}k(k-1)(k-2) - \frac{1}{2}(k-1)(k-2)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\bigl\{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\bigr\}\\
&\qquad - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\bigl\{k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)(k-3)\bigr\}\\
&= \frac{1}{8}n(n+1)(n-1)(n-2) - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\\
&= \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)\bigl\{3(n+1)-4\bigr\}\\
&= \frac{1}{24}(n^3-3n^2+2n)(3n-1)\\
&= \frac{1}{24}(3n^4-10n^3+9n^2-2n)\\
&= \frac{\overset{(50)}{\boxed{1}}}{\underset{(51)}{\boxed{8}}}n^4 - \frac{\overset{(51)}{\boxed{5}}}{\underset{(53)(54)}{\boxed{12}}}n^3 + \frac{\overset{(55)}{\boxed{3}}}{\underset{(56)}{\boxed{8}}}n^2 - \frac{\overset{(57)}{\boxed{1}}}{\underset{(58)(59)}{\boxed{12}}}n
\end{aligned}$$

〔**IV**〕　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -2,\ 0)$,　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 4)$

(1)　点 P は平面 ABC 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(s,\ t\text{ は実数})\\&=(1,\ 0,\ 0)+s(-1,\ -2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 4)\\&=(1-s-t,\ -2s,\ 4t)\qquad\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

と表され，AP = BP より

$$(-s-t)^2+(-2s)^2+(4t)^2=(1-s-t)^2+(-2s+2)^2+(4t)^2$$
$$1-2(s+t)-8s+4=0$$
$$\therefore\ 10s+2t=5\qquad\cdots\cdots\ ②$$

AP = CP より

$$(-s-t)^2+(-2s)^2+(4t)^2=(1-s-t)^2+(-2s)^2+(4t-4)^2$$
$$1-2(s+t)-32t+16=0$$
$$\therefore\ 2s+34t=17\qquad\cdots\cdots\ ③$$

②かつ③ より t を消去して

$$2s+17(5-10s)=17\qquad\therefore\ s=\frac{68}{168}=\frac{17}{42}$$

②より

$$t=\frac{5}{2}\left(1-\frac{17}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

①に代入して，点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\overset{(60)}{\boxed{5}}}{\underset{(61)(62)}{\boxed{42}}},\ -\frac{17}{21},\ \frac{40}{21}\right)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{5}{42},\ -\frac{17}{21},\ \frac{40}{21}\right)-(0,\ -2,\ 0)=\frac{5}{42}(1,\ 10,\ 16)$

△ABC の外接円の半径 r は

$$r=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\frac{5}{42}\sqrt{1^2+10^2+16^2}=\frac{5\sqrt{357}}{42}$$

∠QPR = 90°，∠PRQ = 60° であるから，PQ の長さ h は

$$h=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}=\sqrt{3}\,r=\frac{5\sqrt{119}}{14}$$

平面 ABC の法線ベクトルを $\overrightarrow{v}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-a-2b=0\ \text{ かつ }\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-a+4c=0$$

より

$$a=-2b=4c\qquad\therefore\ \frac{a}{4}=\frac{b}{-2}=c$$

$|\overrightarrow{v}|=1$ とすれば，

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(4,\ -2,\ 1)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + h\vec{v} = \left(\frac{5}{42},\ -\frac{17}{21},\ \frac{40}{21}\right) \pm \frac{5\sqrt{17}}{14\sqrt{3}}(4,\ -2,\ 1)$$

よって，点Qの x 座標は

$$x_{\mathrm{Q}} = \frac{5}{42} \pm \frac{5\sqrt{17}}{14\sqrt{3}} \times 4 = \frac{\overset{(63)}{\boxed{5}}}{\underset{(64)(65)}{\boxed{42}}} \pm \frac{\overset{(66)(67)}{\boxed{10}}\sqrt{\overset{(68)(69)}{\boxed{51}}}}{\underset{(70)(71)}{\boxed{21}}}$$

(3) $\triangle$ABCの面積 S は，公式より

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \times 17 - 1^2} = \sqrt{21}$$

四面体QABCの体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{21}\cdot\frac{5\sqrt{119}}{14} = \frac{\overset{(72)}{\boxed{5}}\sqrt{\overset{(73)(74)}{\boxed{51}}}}{\underset{(75)}{\boxed{6}}}$$