

図チャレ 第1回 (2001年10月)

長方形内に置かれた三角形の面積は、もとの長方形の面積の $\frac{1}{2}$ を越えないことを示せ。

出典：1994年 名古屋大学

解答

三角形の頂点を A, B, C とする。必要ならば適当に平行移動することにより、A と B は長方形の辺上にあるとしてよい。

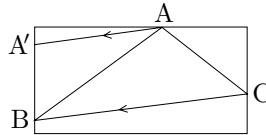
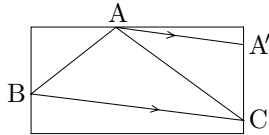
AC または BC を延長して長方形の辺と交わる点を C' とすると

$$\triangle ABC \leq \triangle ABC'$$

であるから、はじめから頂点 C が長方形の辺上にある場合で示せば十分である。

どの2頂点も長方形の同じ辺上にないとき、ある2頂点は長方形の対辺上にある。

B と C が長方形の対辺上にあるとき、



A から BC に平行な直線をひいて長方形の辺と交わる点を A' とすると

$$\triangle ABC \text{ と } \triangle A'BC \text{ の面積は等しい}$$

が、A'B または A'C は長方形の辺上にある。

必要ならば頂点の名前をつけかえて、A'B が長方形の辺上にあるとして一般性を失わない。

A'B = a とし、A'B を含む長方形の辺の長さを x、その隣接辺の長さを y とすると、

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} ay \leq \frac{1}{2} xy$$

(証明おわり)

