図チャレ 第2回(2001年11月)

円に外接する平行四辺形が与えられているとき，この平行四辺形はひし形であることを示せ。

コメント：あとから解答を見ると「な〜んだ」ということになりますが，意外に論じにくい問題です。「対角線の交点が円の中心に一致するから明らか」と錯覚してしまいそうですが，そもそもそれを証明する問題とも言えるので，それでは循環論法となってしまいます。ひょっとしたら，対角線の交点にこだわらない方が証明しやすいかも知れません。

解答

円の中心をOとし，その円に外接する平行四辺形の頂点を順にA，B，C，Dとする。辺AB，BCはともに頂点Bから円にひいた接線であるから，

$$\angle\mathrm{ABO} = \angle\mathrm{CBO}$$

同様に，$\angle\mathrm{ADO} = \angle\mathrm{CDO}$も成り立つ。

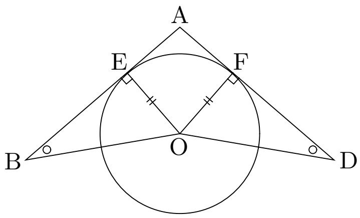
平行四辺形の性質より$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC}$であるから，

$$\angle\mathrm{ABO} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ADO}$$

Oから辺AB，ADにおろした垂線の足をそれぞれE，Fとすると，

$$\mathrm{OE} = \mathrm{OF}\ \ (\text{円の半径})$$

$\angle\mathrm{EBO} = \angle\mathrm{FDO}$であるから，直角三角形の合同条件より



$$\triangle\mathrm{EBO} \equiv \triangle\mathrm{FDO},\ \ \text{特に}\ \mathrm{EB} = \mathrm{FD}$$

辺AB，ADは点Aから円にひいた接線で

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF}$$

であるから，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AE} + \mathrm{EB} = \mathrm{AF} + \mathrm{FD} = \mathrm{AD}$$

平行四辺形ABCDは，もともと対辺の長さは等しかったから4辺の長さが等しいことになり，ひし形であることが示された。 (おわり)

別証(アウトライン)

$\angle\mathrm{ABO} = \angle\mathrm{ADO}$を導いたあと，

$$\angle\mathrm{DAB} + \angle\mathrm{ABO} + \angle\mathrm{BOD} + \angle\mathrm{ADO} = 360^\circ$$

$$\angle\mathrm{ABO} = \angle\mathrm{CBO},\ \ \angle\mathrm{ADO} = \angle\mathrm{CDO}$$

が成り立つことに注意して，平行四辺形の対角の大きさが等しいことより

$$\angle\mathrm{BOD} = 180^\circ$$

を示し，$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$を示すこともできる。