図チャレ 第3回(2001年12月)

一辺の長さが 1 である正方形に含まれる正三角形の一辺の長さの最大値を求めよ。

コメント：単に最大値を言い当てるだけでは正解とは認められません。その値が実際にとり得ること，最大であることをきちんと論じる必要があります。

解答

座標平面上において，正方形の 4 頂点を $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ とする。必要ならば平行移動と回転移動を行なうことにより，正三角形の 2 頂点は $\mathrm{A}(s,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ t)$ $(s^2+t^2>0)$ としてよい。原点を O とする。

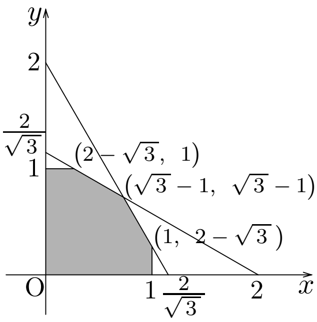
$\angle\mathrm{OAB}$ または $\angle\mathrm{OBA}$ は 45° 以下であることより，A, P, B の順に反時計回りとなることに注意する。正三角形のもう一つの頂点 P について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(s,\ t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(t,\ s)=\left(\frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}s+\frac{1}{2}t\right)$$

が成り立つ。頂点 P が正三角形の周および内部にあるための条件は

$$0<\frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}t\leqq 1,\quad 0<\frac{\sqrt{3}}{2}s+\frac{1}{2}t\leqq 1,\quad 0\leqq x\leqq 1,\quad 0\leqq t\leqq 1$$

であり，st 平面上に図示すると次図の網目部分となる。ただし，座標軸上は含まず，その他の境界線上は含む。



よって，正三角形の一辺の長さ $\sqrt{s^2+t^2}$ の最大値は

$$\max\left\{1,\ \sqrt{1^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2},\ \sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\quad(\text{答})$$