図チャレ 第5回(2002年2月)

円 C 上に 2 定点 A，B と動点 P があり，三角形 ABP の内心を I とし，PI の延長と円 C との交点を Q とする。このとき，動点 P の位置に関係なく，QA = QB であることを証明せよ。

コメント：2001 年，2002 年のセンター試験で続けて出題された題材です。受験生の間では有名？

解答

I は △PAB の内心であり，PI は ∠APB の二等分線であることと，弧 QB に対する円周角に注目して

$$\angle \mathrm{IPA} = \angle \mathrm{IPB} = \angle \mathrm{QAB}$$

三角形の外角は，それと隣り合わない 2 つの内角の和に等しいことより，

$$\angle \mathrm{QIA} = \angle \mathrm{IAP} + \angle \mathrm{IPA}$$

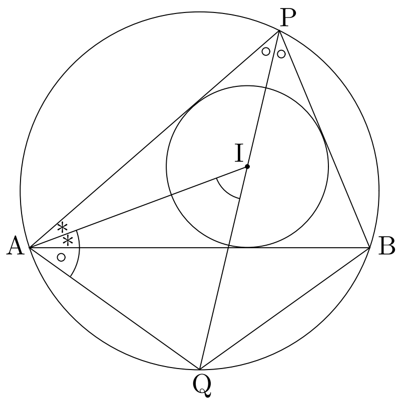
内角 A の二等分線 AI についても PI と同様に

$$\angle \mathrm{IAP} = \angle \mathrm{IAB}$$

以上をまとめると，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{QIA} &= \angle \mathrm{IAP} + \angle \mathrm{IPA}\\ &= \angle \mathrm{IAB} + \angle \mathrm{QAB}\\ &= \angle \mathrm{QAI}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{QA} = \mathrm{QI}$$



頂点 B の周辺についても同様に考えて QB = QI であるから，

$$\mathrm{QA} = \mathrm{QB}$$

である。

(証明おわり)