図チャレ 第6回(2002年3月)

1辺の長さが a の正四面体 $ABCD$ が与えられているとする。直径が b の十分に長い円柱の内部に，正四面体 $ABCD$ がすっぽり入るとき，a, b の満たすべき不等式を求めよ。ただし，四面体 $ABCD$ の重心 G は円柱の中心軸上にあるものとする。

出典：2002 年 東京都立大学 理学部

解答

一辺の長さ a の正四面体は，一辺の長さ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (各面の対角線の長さ a) の立方体の 4 頂点を結ぶ四面体として実現できるから，

$$AB \perp CD,\ (AB \text{ と } CD \text{ の距離}) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

である。そこで，座標空間において

$$G = O(0,\ 0,\ 0),\quad A\left(\frac{a}{2},\ 0,\ \frac{a}{2\sqrt{2}}\right),\quad B\left(-\frac{a}{2},\ 0,\ \frac{a}{2\sqrt{2}}\right),$$
$$C\left(0,\ \frac{a}{2},\ -\frac{a}{2\sqrt{2}}\right),\quad D\left(0,\ -\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$$

として一般性を失わない。円柱の中心軸の方向ベクトルを

$$\overrightarrow{n} = (p,\ q,\ r) \quad (p^2 + q^2 + r^2 = 1)$$

とおく。

$A,\ B,\ C,\ D$ から中心軸におろした垂線の足をそれぞれ $A',\ B',\ C',\ D'$ とすると，

$OA = OB = OC = OD = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$ より

$$PP' = \sqrt{\frac{3}{8}a^2 - OP'^2} \quad (P = A,\ B,\ C,\ D)$$

であるから，

「正四面体 $ABCD$ が直径 $b\left(\text{半径 } \dfrac{b}{2}\right)$ の円柱にすっぽり入る」

$$\iff \max_{p,q,r}\{AA',\ BB',\ CC',\ DD'\} \text{ の最小値が } \frac{b}{2} \text{ より小}$$

$$\iff \sqrt{\frac{3}{8}a^2 - \min_{p,q,r}\{OA'^2,\ OB'^2,\ OC'^2,\ OD'^2\}} \text{ の最小値} < \frac{b}{2}$$

$$\iff -\min_{p,q,r}\{OA'^2,\ OB'^2,\ OC'^2,\ OD'^2\} \text{ の最小値} < \frac{b^2}{4} - \frac{3}{8}a^2$$

$$\iff \min_{p,q,r}\{OA'^2,\ OB'^2,\ OC'^2,\ OD'^2\} \text{ の最大値} > \frac{3}{8}a^2 - \frac{b^2}{4}$$

$\cdots\cdots$ ①

正射影の公式と $|\overrightarrow{n}|=1$ より

$$OA'=|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{n}|=\frac{a}{2}\left|p+\frac{r}{\sqrt{2}}\right|,\ OB'=|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{n}|=\frac{a}{2}\left|-p+\frac{r}{\sqrt{2}}\right|$$

$$OC'=|\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{n}|=\frac{a}{2}\left|q-\frac{r}{\sqrt{2}}\right|,\ OD'=|\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{n}|=\frac{a}{2}\left|q+\frac{r}{\sqrt{2}}\right|$$

であるから，

$$\min_{p,\,q,\,r}\{OA',\ OB',\ OC',\ OD'\}$$

$$=\min_{\substack{p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0\\ p^2+q^2+r^2=1}}\left\{\frac{a}{2}\left|p-\frac{r}{\sqrt{2}}\right|,\ \frac{a}{2}\left|q-\frac{r}{\sqrt{2}}\right|\right\}\qquad\cdots\cdots ②$$

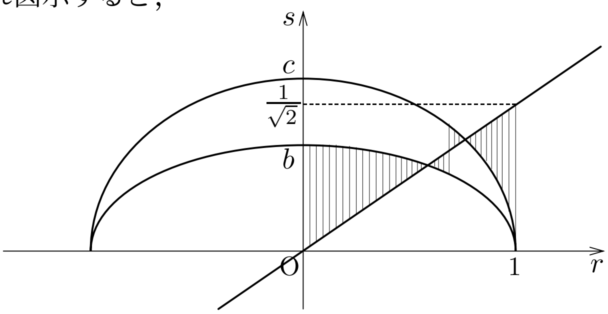
と考えてよい。$p^2+q^2=1-r^2$ より

$$p=\sqrt{1-r^2}\,\cos\theta,\ \ q=\sqrt{1-r^2}\,\sin\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

と表され，θを固定して rs 平面上に 3 つのグラフ

$$s=\sqrt{1-r^2}\,\cos\theta,\ \ s=\sqrt{1-r^2}\,\sin\theta,\ \ s=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

をそれぞれ図示すると，



ただし，$b=\min\{\cos\theta,\ \sin\theta\}$，$c=\max\{\cos\theta,\ \sin\theta\}$である。

図より

$$\min_{\substack{p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0\\ p^2+q^2+r^2=1}}\left\{\left|p-\frac{r}{\sqrt{2}}\right|,\ \left|q-\frac{r}{\sqrt{2}}\right|\right\}\ \text{の最大値は}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ (r=1)$$

であるから，②，①より求める条件は

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2>\frac{3}{8}a^2-\frac{b^2}{4}\qquad\therefore\ \ b>a\quad(\text{答})$$

(注) 一辺の長さ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ の立方体に注目した時点で，$b>a$が十分条件であることはわかっているが，必要条件($b\leqq a$で不可能)であることの論証は難しい。