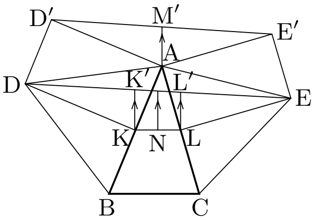
図チャレ 第７回 (2002 年４月)

平面上に三角形 ABC と 2 つの正三角形 ADB, ACE とがある。ただし点 C, 点 D は直線 AB に関して反対側にあり，また点 B, 点 E は直線 AC に関して反対側にある。線分 AB の中点を K, 線分 AC の中点を L, 線分 DE の中点を M とする。線分 KL の中点を N とするとき，直線 MN と直線 BC とは垂直であることを示せ。

出典：2002 年 名古屋工業大学

解答



長方形 AKDD′ および長方形 ALEE′ をそれぞれ三角形 ABC の外側に作り，D′E′ 上に点 M′ を

$$\mathrm{AM'} /\!/ \mathrm{MN}$$

となるようにとる。このとき，M′ が D′E′ の中点となることをまず示す。

K, L から MN に平行な直線をひき，線分 DE と交わる点をそれぞれ K′, L′ とおくと，N は KL の中点であるから

$$\mathrm{K'M} = \mathrm{ML'}$$

M は DE の中点であるから

$$\mathrm{DK'} = \mathrm{L'E}$$

$\mathrm{AM'} /\!/ \mathrm{K'K} /\!/ \mathrm{L'L}$，$\mathrm{D'A} /\!/ \mathrm{DK}$ より

(D′ から AM′ におろした垂線の長さ) = (D から K′K におろした垂線の長さ)
= (E から L′L におろした垂線の長さ)
= (E′ から AM′ におろした垂線の長さ)

であるから，M′ は D′E′ の中点である。

点 A に関して点 C と対称な点を C′ とすると，D′, E′ の定め方より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD'} = \mathrm{AC'} : \mathrm{AE'} = 2 : \sqrt{3}$$

$$\angle \mathrm{BAC'} = \angle \mathrm{D'AE'} = \angle \mathrm{C'AD'} + 90^\circ$$

であるから

$$\triangle \mathrm{ABC'} \backsim \triangle \mathrm{AD'E'}$$

したがって，BC′ の中点を P とすると

$$\mathrm{AM'} \perp \mathrm{AP}$$

であり，三角形 C′BC において中点連結定理をあてはめると，

$$\mathrm{BC} /\!/ \mathrm{AP} \perp \mathrm{AM'} /\!/ \mathrm{MN}$$

(証明おわり)

(注) 複素数を用いると，もっと楽に証明できる。複素数平面上において原点に頂点 A をおき，2 頂点 B, C を表す複素数をそれぞれ β, γ として，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を表す複素数を求めると $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,i\,(\beta - \gamma)$ となるからである。