

図チャレ 第8回(2002年5月)

鋭角三角形 ABC の垂心を H とし, 辺 BC の中点を M とする。辺 BC の垂直二等分線上に点 P を, $2MP = AH$ となるように三角形 ABC の外部にとる。このとき, 点 P は三角形 HBC の外心であることを示せ。

初等幾何による証明

点 P は辺 BC の垂直二等分線上にあるから

$$BP = CP$$

以下, $BP = HP$ が成り立つことを示す。

辺 AB の中点を N , 線分 BH の中点を Q とする。

$\triangle ABH$ において, 中点連結定理より

$$NQ \parallel AH, NQ = \frac{1}{2}AH$$

点 P の位置についての仮定より

$$MP \parallel AH, MP = \frac{1}{2}AH$$

であるから,

$$MP \parallel NQ, MP = NQ$$

であり, 四角形 $MPQN$ は平行四辺形となる。

$\triangle ABC$ において, 中点連結定理および垂心の性質より

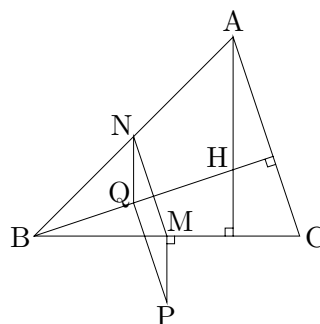
$$MN \parallel AC \perp BH$$

$PQ \parallel MN$ より, PQ は線分 BH の垂直二等分線であるから,

$$BP = HP$$

以上より $HP = BP = CP$ であるから, 点 P は三角形 HBC の外心である。

(証明おわり)



ベクトルによる証明

$$\overrightarrow{HA} = \vec{a}, \overrightarrow{HB} = \vec{b}, \overrightarrow{HC} = \vec{c}, \overrightarrow{HP} = \vec{p} \text{ とおく。}$$

点 H は $\triangle ABC$ の垂心で $\overrightarrow{HA} = \vec{a}$ と $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ は垂直であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

同様に, $HB \perp CA$ より $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ が得られるから,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

点 P の位置についての仮定より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HP} &= \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \overrightarrow{HM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{HB} = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{HC} = \frac{-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}{2}$$

であるから, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HP}|^2 &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{4} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BP}|^2 &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{4} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}|^2 &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{4} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore HP = BP = CP$$

よって, 点 P は三角形 HBC の外心である。

(証明おわり)