図チャレ 第９回 (2002年６月)

(1)　すべての辺の長さが 1 である正五角錐の体積 V_1 を求めよ。

(2)　一辺の長さ 1 のサッカーボール体の体積 V_2 を求めよ。ここでサッカーボール体と呼ぶ立体は，表面が正六角形 20 枚，正五角形 12 枚から成る多面体のことを指す。

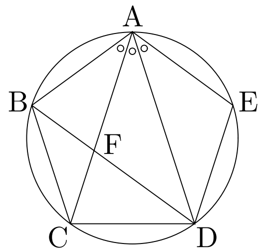
コメント：サッカーワールドカップ日韓同時開催記念です。

解答

(1)　まず，一辺の長さ 1 の正五角形の対角線の長さ x と外接円の半径 r を求める。

正五角形の頂点を A，B，C，D，E とし，対角線 AC と対角線 BD の交点を F とする。正五角形 ABCDE は 3 つの三角形 ABC，ACD，ADE に分割できるから，内角の総和は $180^\circ \times 3 = 540^\circ$ であり，

$$\text{一つの内角の大きさは } 108^\circ$$



である。正五角形 ABCDE はある円に内接することに注意すると，弧BC, CD, DE に対する円周角は等しいから，対角線AC, AD は∠BAEを 3 等分する。他の頂角についても同様であるから，特に $\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CDF}$，$\angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{DCF}$ であり，

$$\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{DCF}$$

が成り立つ。これから $\mathrm{DC} = \mathrm{DF}$ であり，同様に

$$\mathrm{AF} = \mathrm{AB} = 1$$

である。

正五角形の対角線の長さを x とすると，この相似関係より

$$x : 1 = 1 : (x-1)$$
$$x(x-1) = 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (>0)$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理をあてはめると，

$$\cos 108^\circ = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - x^2}{2} = \frac{2-(x+1)}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin 108^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

正五角形 ABCDE の外接円の半径 r は，正弦定理より

$$r = \frac{x}{2\sin 108^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

いま，正五角錐の底面にない頂点を P とし，P から底面におろした垂線の足を H とする。頂点 P から底面の頂点までの距離がすべて 1 で等しいから，H は底面の中心(外接円の中心)となる。PH の長さを h とすると，ピタゴラスの定理より

$$h=\sqrt{1^2-r^2}=\sqrt{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

底面の正五角形の面積 S は

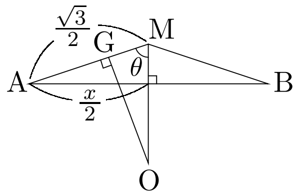
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}r^2\sin 72^\circ\times 5=\frac{5}{2}r^2\sin 108^\circ\\&=\frac{5}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\&=\frac{5+\sqrt{5}}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

よって，一辺の長さ 1 の正五角錐の体積 V_1 は

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\frac{5+\sqrt{5}}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\\&=\frac{5+\sqrt{5}}{24}\quad(\text{答})\end{aligned}$$

(2) まず，一辺の長さ 1 の正二十面体の体積 V_0 を求める。

正二十面体の隣り合う正三角形を ACD, BCD とし，隣接辺 CD の中点を M とする。正二十面体の中心 O から面 ACD におろした垂線の足 G は △ACD の外心であるが，△ACD は正三角形であるから G は重心となり，AM を 2 : 1 に内分する。



正二十面体の一つの頂点には 5 枚の正三角形が集まり，それは正五角錐の側面があることと同じであるから，線分 AB は一辺の長さ 1 の正五角形の対角線であり，線分 AB の長さは (1)で求めた x の値である。$\angle\mathrm{AMO}=\theta$ とおくと

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}&=\left(\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}\right)^2-1\\&=\frac{12-(1+\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})^2}\\&=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

直角三角形OMGに注目すると，OGの長さ h_0 は

$$h_0 = \mathrm{MG}\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$

$\triangle$ACDの面積 S_0 は

$$S_0 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，一辺の長さ1の正二十面体の体積 V_0 は

$$V_0 = \frac{1}{3} S_0 h_0 \times 20 = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$$

一辺の長さ1のサッカーボール体は，一辺の長さ3の正二十面体から12個の頂点部分にある一辺の長さ1の正五角錐を取り除いた立体であるから，その体積 V_2 は

$$\begin{aligned} V_2 = 3^3 V_0 - 12V_1 &= 27 \times \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} - 12 \times \frac{5+\sqrt{5}}{24} \\ &= \frac{45(3+\sqrt{5}) - 2(5+\sqrt{5})}{4} \\ &= \frac{125+43\sqrt{5}}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$