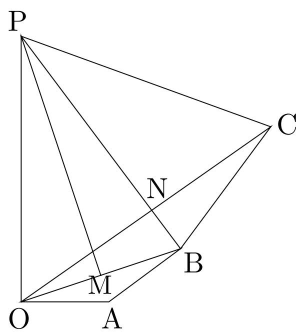
図チャレ 第10回 (2002年7月)

三角形OABは OA＝AB なる二等辺三角形とし，その外側に三角形OABと相似な OB＝BC なる二等辺三角形OBCをつくる。辺OBの垂直二等分線と辺BCの垂直二等分線の交点をPとするとき，∠POAは直角であることを示せ。

コメント：6月の問題が重ためだったので，今月は中学生でも簡単に解ける問題にしました。とはいえ，油断すると循環論法に陥ってしまうので，くれぐれもご注意を。

証明1



$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{ABO}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{BCO}=\theta$ とおき，OBの中点をM，OCの中点をNとする。

MPは辺OBの垂直二等分線であるから PO＝PB であり，

$$\angle\mathrm{POB}=\angle\mathrm{PBO} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。PO＝PB＝PC および OB＝BC より，BPは辺OCの垂直二等分線であり，中点Nを通るから，直角三角形OBNに注目すると，

$$\angle\mathrm{PBO}=\angle\mathrm{NBO}=90^\circ-\theta \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\angle\mathrm{POA}=\angle\mathrm{POB}+\angle\mathrm{AOB}=(90^\circ-\theta)+\theta=90^\circ$$

(おわり)

証明2

PO＝PB＝PC より Pは△OBCの外心であり，△OBCの外接円のOにおける接線をℓとすると，

$$\mathrm{OP}\perp\ell$$

である。接弦定理より

ℓ と OBのなす角は ∠OCBに等しい。

一方，OA = AB，△OAB ∽ △OBC より

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{OCB}$$

であるから，点Aは ℓ 上にある。

よって，∠POAは直角である。

(おわり)