図チャレ 第11回 (2002年8月)

異なる n 個の点 P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_n はどの3点も同一直線上になく，どの2点も線分で結ばれている。

すべての線分 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ に任意に「向き」をつけるとき，その「向き」に沿って n 個すべての点を通る経路が存在することを示せ。

コメント：一方通行路があっても目的地には必ず到達できるということです。

解答

1つの経路が通る点の最大個数を s とし，適当に点の番号を付け替えて，

経路 $R : \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \to \mathrm{P}_s$ は通る点の個数が最大

として一般性を失わない。

$s < n$ であるとすると，P_n は P_1，$\cdots$，P_s のいずれとも異なる点である。ここで，$\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_1$ と向きづけられているとすれば，$\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \to \mathrm{P}_s$ という向きのついた経路が存在して s の最大性に反してしまうから，

$$\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_n$$

と向きが定まる。次に，$\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_2$ とすれば，$\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \to \mathrm{P}_s$ という経路が存在して s の最大性に反してしまうから，

$$\mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_n$$

と向きが定まる。以下，同様にして，

$$\mathrm{P}_3 \to \mathrm{P}_n, \ \cdots\cdots, \ \mathrm{P}_{s-1} \to \mathrm{P}_n$$

と向きが定まる。

このとき，$\mathrm{P}_s \to \mathrm{P}_n$ とすれば，

$\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \mathrm{P}_{s-1} \to \mathrm{P}_s \to \mathrm{P}_n$ は s の最大性に反する

こととなり，$\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_s$ とすれば，

$\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \mathrm{P}_{s-1} \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_s$ は s の最大性に反する

こととなる。よって，$s < n$ である限り矛盾が生じることになり，

$$s = n$$

つまり n 個すべての点を通る経路が存在する。 (おわり)