図チャレ 第12回 (2002年9月)

周の長さが一定である三角形の内接円の半径が最大となるのは，正三角形のときであることを示せ。

コメント：1 辺を固定して 2 辺を動かすことをくり返すのは極限操作となるので，純粋に図形的な考察だけで示すのは難しいでしょう。

解答

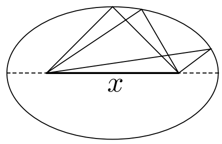
相似な三角形を考えることにより，周の長さが 1 のときに示せば十分である。
3 辺の長さを x, y, z とし，三角形の面積を S, 内接円の半径を r とすると，

$$S=\frac{1}{2}(x+y+z)r=\frac{1}{2}r$$

が成り立つから，

$$r\text{が最大}\iff S\text{が最大}$$

と言い換えられることに注意する。



x を固定して y, z を動かすと，楕円の性質より $y=z$ のとき三角形の面積は最大となる。そこで，はじめから

$$3\text{辺の長さは}\ x\,,\ \frac{1-x}{2}\,,\ \frac{1-x}{2}$$

として差し支えない。x の変域は，$x>0$ かつ $x<y+z=1-x$ より

$$0<x<\frac{1}{2}$$

である。

長さ x の辺を底辺とすると，三平方の定理(ピタゴラスの定理)より高さ h は

$$h=\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-2x}$$

であるから，内接円の半径 r は

$$r=2S=xh=\frac{1}{2}\sqrt{x^2(1-2x)}$$

である。ここで，

$$f(x)=x^2(1-2x)=x^2-2x^3\quad\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$$

とおくと，

$$f'(x)=2x-6x^2=6x\left(\frac{1}{3}-x\right)$$

は $0<x<\dfrac{1}{2}$ では $\dfrac{1}{3}-x$ と符号が同じであるから，

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{f(x)}\ \text{は}\ x=\frac{1}{3}\ \text{のとき極大かつ最大}$$

となる。このとき，$x = y = z = \dfrac{1}{3}$ であるから，

周の長さが一定である三角形の内接円の半径は正三角形のとき最大
となる。 (おわり)

別解：「ヘロンの公式」を用いればスッキリと示せる。ただ，学校で正規には習わない公式であることと，結末が予想できないと思いつかない議論になるのが難点か。

3 辺の長さを a，b，c とし，$\dfrac{a+b+c}{2} = l$ とすると，ヘロンの公式より三角形の面積 S は

$$S = \sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}$$

内接円の半径を r とすると

$$S = lr$$

であるから，l が一定ならば

$$r \text{が最大} \Longleftrightarrow (l-a)(l-b)(l-c) \text{が最大}$$

と言い換えられる。

相加・相乗平均の不等式より

$$(l-a)(l-b)(l-c) \leqq \left(\frac{(l-a)+(l-b)+(l-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{l}{3}\right)^3$$

ここで，不等式の等号は

$$l-a = l-b = l-c \text{ すなわち } a = b = c$$

のとき成り立ち，$\left(\dfrac{l}{3}\right)^3$ が定数であることより，

$(l-a)(l-b)(l-c)$ および 内接円の半径 r は $a = b = c$ のとき最大
となる。 (おわり)