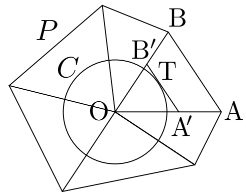
図チャレ 第13回 (2002年10月)

(1) 凸多角形 P の内部に円 C があるとき，P の周は C の周より長いことを示せ。
(2) 円 C の内部に凸多角形 Q があるとき，C の周は Q の周より長いことを示せ。

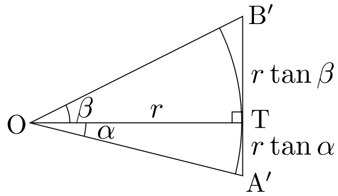
解答

(1) 円 C の中心 O と P の各頂点を線分で結び，O を頂点とする三角形に分割して考えることにより，P の隣り合う 2 頂点 A，B に対して辺 AB が $\angle\mathrm{AOB}$ 内にある C の円弧より長いことを示せばよい。



辺 AB に平行な C の接線と線分 OA，OB との交点をそれぞれ A′，B′ とすると，

$$\mathrm{AB} \geqq \mathrm{A'B'}$$



線分 A′B′ と円 C の接点を T とし，

$$\angle\mathrm{A'OT} = \alpha,\quad \angle\mathrm{B'OT} = \beta$$

とおけば，円 C の半径を r として

$$\mathrm{A'B'} = r(\tan\alpha + \tan\beta),\quad (\text{弧長}) = r(\alpha+\beta)$$

ここで，$\triangle\mathrm{OA'B'}$ と扇形の面積を比べると，

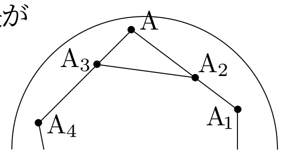
$$\frac{1}{2}r(\tan\alpha+\tan\beta)\times r > \frac{1}{2}r^2(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\ \mathrm{AB} \geqq \mathrm{A'B'} = r(\tan\alpha+\tan\beta) > r(\alpha+\beta)$$

以上より，P の周が C の周より長いことが示された。 (おわり)

(2) $n \geqq 4$ として，Q の連続する 4 頂点を $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_3}$，$\mathrm{A_4}$ とする。

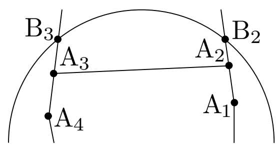
(i) 辺 $\mathrm{A_1A_2}$ の $\mathrm{A_2}$ の側への延長と辺 $\mathrm{A_3A_4}$ の $\mathrm{A_3}$ の側への延長が C の内部または周上に交点 A をもつとき，三角不等式より



$$\mathrm{A_2A_3} < \mathrm{A_2A} + \mathrm{AA_3}$$

であるから，$n-1$ の場合に帰着される。

(ii) 交点 A が C の外部ある，または交点 A が存在しないとき，辺 $\mathrm{A_1A_2}$ の $\mathrm{A_2}$ の側への延長と C の交点を $\mathrm{B_2}$，辺 $\mathrm{A_3A_4}$ の $\mathrm{A_3}$ の側への延長と C の交点を $\mathrm{B_3}$ とする。



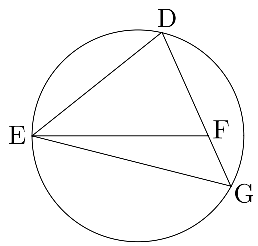
$$\mathrm{A_2A_3} < \mathrm{A_2B_3} + \mathrm{B_3A_3} < \mathrm{A_2B_2} + \mathrm{B_2B_3} + \mathrm{B_3A_3}$$

であるから，Q が C の(周および)内部にある別の凸 n 角形で Q より周の長いものに帰着される。

$\mathrm{A_1}$を端点とする半直線 $\mathrm{A_1A_2}$ と$\mathrm{A_4}$ を端点とする半直線 $\mathrm{A_3A_4}$ が C の内部に交点を持たない限り (ii) の作業を続け，持つ場合は (i) の変形を行なうことにより，最終的には円 C に内接する n 角形または凸 $n-1$ 角形に帰着される。円に内接する多角形の場合は，各辺より両端を結ぶ円弧の方が長いことより，C の周は Q の周より長いことがわかる。

結局，Q が三角形の場合に示されれば十分である。

三角形の場合，平行移動させることにより，はじめから 2 頂点は円 C 上にあるとしてよい。円 C 上の 2 頂点を D, E とし，三角形 Q の残りの頂点を F とする。



DF の F の側への延長と C との交点を G とすると

$$\mathrm{EF} < \mathrm{EG} + \mathrm{GF}$$

であるから，

$$\mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FD} < \mathrm{DE} + \mathrm{EG} + \mathrm{GD} < (C\text{の周の長さ})$$

(おわり)