図チャレ 第14回(2002年11月)

正四面体OABCの辺OA，OB，OCのそれぞれの上に点P，Q，Rを $0 < \mathrm{OP} \leqq \mathrm{OQ} \leqq \mathrm{OR}$ を満たすようにとる。

(1) $\angle\mathrm{QPR}$，$\angle\mathrm{QRP}$ はいずれも鋭角であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{PQR}$ が直角になる場合があるか。

解答

$\mathrm{OP} = a$，$\mathrm{OQ} = b$，$\mathrm{OR} = c$，$\mathrm{QR} = p$，$\mathrm{RP} = q$，$\mathrm{PQ} = r$ とおく。

(1) $\triangle\mathrm{OQR}$，$\triangle\mathrm{ORP}$，$\triangle\mathrm{OPQ}$ に余弦定理をそれぞれあてはめると

$$p^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ = b^2 - bc + c^2$$
$$q^2 = c^2 - ca + a^2$$
$$r^2 = a^2 - ab + b^2$$

であるから，

$$q^2 + r^2 - p^2 = 2a^2 - ca - ab + bc = a^2 + (a-b)(a-c)$$
$$p^2 + q^2 - r^2 = 2c^2 - bc - ca + ab = c^2 + (c-a)(c-b)$$

仮定より $0 < a \leqq b \leqq c$ であるから

$$q^2 + r^2 - p^2 \geqq a^2 > 0\,,\quad p^2 + q^2 - r^2 \geqq c^2 > 0$$

であり，$\angle\mathrm{QPR}$，$\angle\mathrm{QRP}$ はいずれも鋭角である。 (おわり)

(2) (1)の考察から

$$r^2 + p^2 - q^2 = 2b^2 - ab - bc + ca = 2b^2 - (c+a)b + ca$$

ここで，2次関数

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - (c+a)x + ca \\ &= 2\left(x - \frac{c+a}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}(c+a)^2 + ca \\ &= 2\left(x - \frac{c+a}{4}\right)^2 - \frac{a^2 - 6ac + c^2}{8} \end{aligned}$$

を考えると，

$$f(a) = 2a^2 - (c+a)a + ca = a^2 > 0$$
$$f(c) = 2c^2 - (c+a)c + ca = c^2 > 0$$

であるから，$f(x) = 0$ かつ $a \leqq x \leqq c$ を満たす実数 x が存在するための条件は，

$$a^2 - 6ac + c^2 \geqq 0 \ \text{かつ}\ a \leqq \frac{a+c}{4} \leqq c$$
$$\frac{c}{a} \geqq 3 + 2\sqrt{2} \ \text{かつ}\ \frac{c}{a} \geqq 3 \qquad \therefore\ \frac{c}{a} \geqq 3 + 2\sqrt{2}$$

a，c がこの条件を満たすときに限り $r^2 + p^2 = q^2$ となる b が存在するから，

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{OR} \geqq (3+2\sqrt{2})\mathrm{OP}\ \text{のとき}\ \angle\mathrm{PQR}\ \text{が直角となる場合がある} \\ \mathrm{OR} < (3+2\sqrt{2})\mathrm{OP}\ \text{のとき}\ \angle\mathrm{PQR}\ \text{が直角となる場合はない} \end{array}\right\}\ \text{(答)}$$