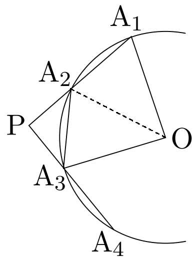
図チャレ 第16回 (2003年1月)

n を5以上の自然数とする。正 n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の外接円の中心をOとし，直線 A_1A_2 と直線 A_3A_4 の交点をPとする。このとき，4点O，A_1，P，A_3 は同一円周上にあることを証明せよ。

解答



$\angle PA_2A_3$，$\angle PA_3A_2$ はともに正 n 角形の一つの外角であるから，

$$\angle PA_2A_3 = \angle PA_3A_2 = \frac{2\pi}{n}$$

三角形の内角の総和は π であるから，$\triangle PA_2A_3$ において

$$\angle A_1PA_3 = \angle A_2PA_3 = \pi - 2 \times \frac{2\pi}{n}$$

円の中心角について

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1 = \frac{2\pi}{n}$$

であり，特に

$$\angle A_1OA_3 = 2 \times \frac{2\pi}{n}$$

であるから，

$$\angle A_1OA_3 + \angle A_1PA_3 = \pi$$

円周角の性質より，4点O，A_1，P，A_3 は同一円周上にある。 (おわり)