図チャレ 第18回 (2003年3月)

平面上に相異なる5点 O, P_0, P_1, P_2, P_3 があり,

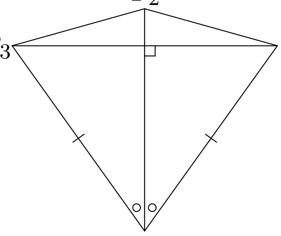
$$OP_0 = OP_1 = OP_2 = OP_3,\quad \angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3$$

を満たす。直線 OP_0 上に点 A をとるとき，四角形 $AP_1P_2P_3$ がひし形ならば

$$A = O \quad \text{または} \quad A = P_0$$

であることを示せ。

解答



$OP_1 = OP_3$, $\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3$ であるから,

OP_2 と P_1P_3 は P_1P_3 の中点で直交する

ことがわかる。

ひし形の対角線は互いに中点で直交するから，点 A は直線 OP_2 上にあり，仮定とあわせて

点 A は 2 直線 OP_0, OP_2 の共有点

である。

(i) P_2 が直線 OP_0 上にないとき

2 直線 OP_0, OP_2 の共有点は O だけであるから

$$A = O$$

(ii) P_2 が直線 OP_0 上にあるとき

$OP_0 = OP_2$, $P_0 \neq P_2$ より

O は P_0P_2 の中点

となり，$2\angle P_0OP_1 = \angle P_0OP_2 = 180^\circ$ であるから

$$\angle P_0OP_1 = 90^\circ$$

よって，P_0P_2 と P_1P_3 は O で直交し，互いに二等分するから

$$A = P_0$$

(証明おわり)