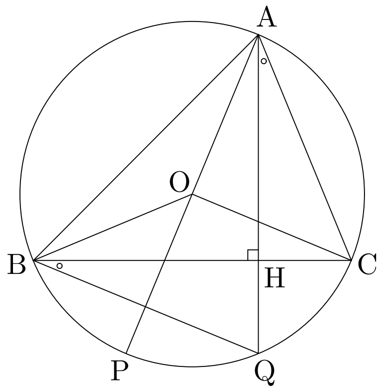
図チャレ 第20回(2003年5月)

鋭角三角形ABCの外心をOとし，AOの延長と外接円との交点をPとする。Aから辺BCにおろした垂線の足をHとし，AHの延長と外接円との交点をQとする。

(1) $\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{OBC}$を求めよ。

(2) $\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}$を示せ。

解答



(1) 円周角の性質より

$$\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}$$

$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$より

$$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OCB}$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BAC}&=\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle\mathrm{OBC})\\&=90^\circ-\angle\mathrm{OBC}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{OBC}=90^\circ \quad (\text{答})$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$は鋭角三角形であるから，外心Oは内部にあることに注意する。

(1)より

$$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{BAH}+\angle\mathrm{CAQ}+\angle\mathrm{OBC}=90^\circ$$

円周角の定理より$\angle\mathrm{CAQ}=\angle\mathrm{CBQ}$であるから，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{OBQ}&=\angle\mathrm{CBQ}+\angle\mathrm{OBC}\\&=\angle\mathrm{CAQ}+\angle\mathrm{OBC}\\&=90^\circ-\angle\mathrm{BAH}\\&=\angle\mathrm{ABH}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{CBQ}=\angle\mathrm{OBQ}-\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{ABH}-\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{ABO}$$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$より

$$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BAO}=\angle\mathrm{ABO}=\angle\mathrm{CBQ}$$

対応する円弧の長さが等しく，弓形が合同となるから，

$$\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}$$

(おわり)

(注) 上の解答は2003年5月当時のもので，(1)を用いて(2)を証明しているが，APが外接円の直径であることと$\angle\mathrm{BHQ}=90^\circ$に注目して

$$\angle\mathrm{BAP}=90^\circ-\angle\mathrm{APB}=90^\circ-\angle\mathrm{AQB}=\angle\mathrm{CBQ}$$

とした方が簡単に証明できる。(2007年12月)